

*student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

Abstrakcja (czyli uproszczenie) jest w informatyce wszechobecna. Mając jakiś obiekt, wiemy zazwyczaj, co powinniśmy mu wprowadzić na wejście i czego spodziewać się na wyjściu. Takie informacje nas już w zupełności satysfakcjonują. Możemy używać tego obiektu, stroniąc od szczegółów jego budowy. I tak, tworząc procesor, możemy pominąć to, z czego są zbudowane bramki logiczne. Projektując system operacyjny, nie musimy przejmować się szczegółami budowy procesora, a pisząc zwykły program, nie wnikamy w szczegóły działania systemów operacyjnych. Oczywiście, takie podejście ma mnóstwo zalet. Ma też jednak pewną wadę.

Rozważmy następujący program będący tabliczką mnożenia. To, w jakiej kolejności będziemy obliczać poszczególne wartości, nie powinno mieć w sumie żadnego znaczenia. W szczególności, żadnej różnicy nie powinniśmy odczuć, zamieniawszy miejscami pętle w programie. Program nadal wykona takie same obliczenia, taką samą liczbę razy, tylko w innej kolejności.

```
#define N (1 << 13)

int tab[N][N];

int main()
{
    for (int j = 0; j < N; j++)
        for (int i = 0; i < N; i++)
            tab[i][j] = i*j;
    return 0;
}
```

Program 1: Tabliczka mnożenia

Jednak okazuje się, że kolejność pętli w programie ma znaczenie. Na komputerze średniej klasy program 1 wykonywał się przez 7,93 s. Z kolei po zamianie pętli miejscami przyspieszył do 1,32 s. Zysk ponad sześciokrotny!

Drugi przykład. Mamy program 2, który w pętli oblicza sumy dwudziestu elementów tablicy. Zastanówmy się, co się stanie, gdy liniijkę, w której deklarujemy tablicę `tab`, zamienimy na `int tab[N][M+512];`? Teoretycznie nie powinno to spowodować żadnych zmian – program wciąż wykona taką samą liczbę instrukcji. Wprawdzie zadeklarowaliśmy trochę więcej pamięci, jednak procesor na tę dodatkową pamięć nawet nie spojrzy. Czy aby na pewno?

```
#define N 100
#define M (1 << 19)

int tab[N][M];

int main()
{
    for (int i = 0; i < N-20; i++)
        for (int j = 0; j < M; j++)
            tab[i][j] = tab[i+1][j] + tab[i+2][j] + ... + tab[i+20][j];
    return 0;
}
```

Program 2: Sumowanie tablicy

Ponownie przyjrzyjmy się czasom działania obu wersji programu. W pierwszej wersji program działa 13,16 s, a po powiększeniu tablicy – o blisko 10 sekund szybciej, tj. 3,18 s.

Skąd wynikają te anomalie czasowe? Z powodu abstrakcji! Podczas omawiania powyższych programów nie zastanawialiśmy się w ogóle, jak procesor interpretuje poszczególne instrukcje i co jest dla niego „wygodniejsze”. Skupiliśmy się jedynie na tym, że w obu programach wykonywane są takie same instrukcje, i to tyle samo razy. Przyjrzymy się teraz budowie i działaniu pamięci cache, aby lepiej zrozumieć, czym różnią się omawiane przez nas przykłady.

W przeciętnym komputerze możemy wyróżnić kilka rodzajów pamięci. Mamy dyski twarde, pamięć RAM oraz pamięć podręczną procesora (tzw. pamięć cache). Te typy pamięci różnią się rozmiarem, ceną oraz czasem dostępu. Dyski twarde są ogromne; za jeden gigabajt płacimy parę złotych, a czas dostępu jest rzędu 10 ms = 10 000 000 ns (nanosekund). Pamięć RAM jest już dużo mniejsza niż dyski twarde; za jeden GB zapłacimy kilkadziesiąt złotych, a czas dostępu do pamięci jest rzędu 60 ns. Pamięć cache procesora jest malutka; za jeden gigabajt tego rodzaju pamięci zapłacimy kilkanaście tysięcy złotych. Za to czas dostępu do tego rodzaju pamięci jest rzędu kilku nanosekund.

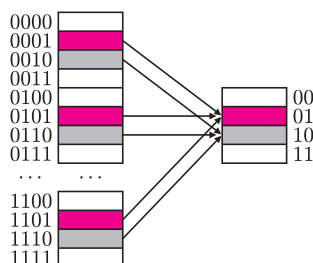
Dążeniem twórców sprzętu jest taki model komputera, w którym średnia cena za gigabajt pamięci w całym komputerze byłaby zbliżona do ceny gigabajtu dysku twardego, natomiast średni czas dostępu do pamięci byłby rzędu czasu dostępu do pamięci cache. Cel ten, jak łatwo się domyślić, jest – póki co – niemożliwy do uzyskania, jednak nasze komputery są bliżej tego modelu, niż mogłoby nam się wydawać.

W cache'u nie możemy zmieścić pamięci całego programu. Pojawia się pewien problem – gdy procesor potrzebuje użyć jakiejś zmiennej, to powinna się ona już znajdować w pamięci cache. Zatem maszyna musi zabawić się w jasnowidza i spróbować przewidzieć, jakie zmienne będą przez program użyte w najbliższej przyszłości. Na szczęście komputerowi z pomocą przychodzi zasada lokalności. Mówi ona, że jeśli jakiś adres pamięci jest właśnie używany, to prawdopodobnie za chwilę będzie znowu potrzebny – albo on, albo adresy znajdujące się blisko niego. Przykładami mogą być listy rozkazów (po wykonaniu rozkazu prawdopodobnie będzie wykonywany rozkaz znajdujący się bezpośrednio po nim) albo tablice (jeśli jakiś element został wykorzystany, to za chwilę prawdopodobnie będziemy potrzebować sąsiedniego elementu).

Ogólna zasada działania pamięci cache jest następująca. Procesor prosi o jakiś adres pamięci. Pamięć cache sprawdza, czy taki adres zawiera. Jeśli tak, to przesyła go do procesora. Jeśli nie, to ściąga go z pamięci RAM wraz z całym blokiem (pamięć RAM jest podzielona na mniejsze porcje informacji, zwane blokami), a następnie przesyła procesorowi potrzebne dane.

Opiszemy teraz, jak bloki umieszczane są w pamięci cache. Zazwyczaj używane jest jedno z tzw. mapowań: skojarzeniowe, sekcyjne i sekcyjno-skojarzeniowe, przy czym w praktyce najczęściej ostatnie. My jednak skupimy się na mapowaniu sekcyjnym, gdyż jest do niego bardzo podobne, a zarazem nieco łatwiejsze do opisanie.

Pamięć cache jest podzielona na sekcje – są to odpowiedniki bloków w pamięci RAM. Każdemu blokowi RAM-u przyporządkowana jest jedna sekcja w pamięci cache, wyznaczona przez jego adres modulo liczba sekcji (rys. 1), która to liczba jest zawsze potęgą dwójki. Dzięki temu, aby „obliczyć”, jaki adres sekcji przyporządkowaliśmy danemu blokowi, nie potrzebujemy wykonywać żadnych pracochłonnych operacji – wystarczy spojrzeć na ostatnie bity adresu bloku. Ponadto, operacja modulo gwarantuje nam, że kilka sąsiednich bloków pamięci RAM może się w tym samym czasie znajdować w pamięci cache (co jest korzystne ze względu na zasadę lokalności). Z drugiej strony może się, oczywiście, zdarzyć, że kilku blokom jest przyporządkowana ta sama sekcja – wówczas w momencie sprowadzania kolejnego z tych bloków do cache'u, poprzedni zostanie nadpisany.

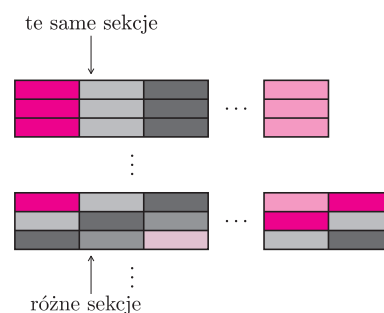


Rys. 1

Po tej nieco dokładniejszej analizie mechanizmu działania pamięci podręcznej procesora przyjrzyjmy się

ponownie naszym programom. W pierwszym z nich istotną rolę niespodziewanie odgrywała kolejność pętli. Aby zrozumieć, skąd wzięła się tak duża różnica, musimy sprawdzić, w jakiej kolejności w pamięci ułożone są kolejne elementy tablicy dwuwymiarowej. Nietrudno sprawdzić (na przykład pisząc prosty program w języku C/C++), że tablica taka zajmuje spójny obszar pamięci. Ułożona jest w następujący sposób: `tab[0][0], tab[0][1], tab[0][2], ..., tab[0][N-1], tab[1][0], ...` itd. W takiej kolejności przeglądamy tablicę, jeżeli odwrócimy kolejność pętli w programie 1. Dzięki temu działa zasada lokalności i procesor łatwo przewiduje, które adresy pamięci będą za chwilę potrzebne. W oryginalnym programie 1 przeglądamy tablicę w sposób dla procesora bardzo chaotyczny. Komórka `tab[0][0]` w ogóle nie leży w pobliżu `tab[1][0]`, przez co procesor, próbując przewidzieć, jakie kolejne adresy będą wykorzystywane, nieustannie się myli, więc musi przysyłać z pamięci RAM do pamięci cache ciągle nowe adresy – a to ma negatywny wpływ na czas działania programu.

Drugi program wydaje się jeszcze ciekawszy. Faktycznie, w pierwszym programie w celu usprawnienia zmieniliśmy kolejność wykonywania instrukcji, natomiast w tym przypadku nawet tego nie zrobiliśmy! Sekret tkwi w tym, że w pierwszej wersji programu 2 drugi wymiar tablicy był potęgą dwójki (choć tak naprawdę ważne jest tylko to, że był on wielokrotnością rozmiaru pamięci cache mojego procesora) – patrz rysunek 2. Dlatego komórki `tab[i+1][j], tab[i+2][j], tab[i+3][j], ..., tab[i+20][j]` trafiały zawsze do tej samej sekcji w pamięci podręcznej. Przebieg tego programu wyglądał więc następująco. Aby obliczyć `tab[i][j]`, procesor musi dodać komórki `tab[i+1][j], ..., tab[i+20][j]` – prosi więc pamięć cache najpierw o `tab[i+1][j]`. Pamięć cache jej nie ma, więc ściąga z pamięci RAM. Następnie procesor prosi o `tab[i+2][j]`. Pamięć cache jej nie ma (w sekcji, w której powinna być ta komórka, jest `tab[i+1][j]`), więc pobiera ją z pamięci głównej, i tak dalej aż do `tab[i+20][j]`. Następnie procesor musi obliczyć `tab[i][j+1]`, co znowu wymagać będzie dwudziestu ściągnięć bloku do pamięci cache itd.



Rys. 2

Gdy zwiększymy liczbę kolumn w tablicy o długość bloku, zagwarantujemy, że komórki `tab[i+1][j], tab[i+2][j], ..., tab[i+20][j]` będą trafiać do sąsiednich sekcji w pamięci podręcznej.

I choć przy obliczaniu pierwszej sumy będzie trzeba wszystkie te bloki ściągnąć do pamięci cache, to przy obliczaniu sumy $\text{tab}[i+1][j+1], \text{tab}[i+2][j+1], \dots, \text{tab}[i+20][j+1]$ odpowiednie bloki będą się już znajdować w pamięci podręcznej, dzięki czemu program nie straci cennych nanosekund.

Być może ktoś powie, że nie warto się w to wszystko w ogóle zagłębiać, gdyż przyspieszamy program jedynie o stały czynnik. Jednak nakład pracy, jaki włożyliśmy w zmianę programów, był minimalny. Jeśli mamy program działający 10 godzin, a potrzebujemy otrzymać wynik w ciągu godziny, to owszem – możemy kupić

dziesięciokrotnie szybszy komputer. Ale czasami możemy zaoszczędzić dużo pieniędzy, po prostu zamieniając kilka linijek miejscami i dodając kilka pozornie nieistotnych znaków w odpowiednich miejscach programu.

Na koniec małe ćwiczenie dla Ciebie, Drogi Czytelniku. Otwórz swoją ulubioną wyszukiwarkę internetową i wyszukaj „mnożenie macierzy C++”. Wejź na pierwszą lepszą stronę. Czy implementacja, którą znalazłeś, jest napisana optymalnie z punktu widzenia działania mechanizmu cache? Czy można ją przyspieszyć, używając metod opisanych w tym artykule? Jak to zrobić?

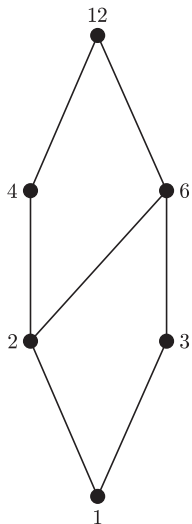
Co to znaczy zrekonstruować porządek?

Marta PRZYBOROWSKA*

W tym artykule przedstawimy problem rekonstrukcji zbioru częściowo uporządkowanego. Będziemy rozważać jedynie zbiory skończone. Do sformułowania problemu będziemy potrzebować kilku podstawowych pojęć.

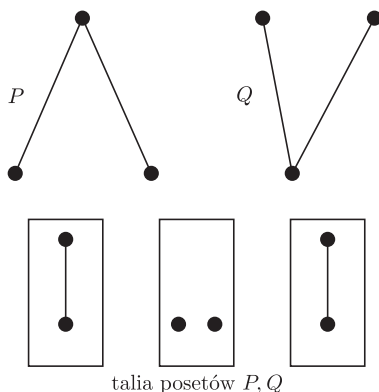
Porządkiem częściowym na zbiorze X nazywamy relację $<$ spełniającą własność przechodniości i przeciwzwrotności. Mówiąc, że relacja $<$ jest *przechodnia*, mamy na myśli, że jeżeli a, b, c są takimi elementami zbioru X , że $a < b$ i $b < c$, to również $a < c$. *Przeciwzwrotność* relacji $<$ oznacza, że nigdy nie zachodzi $a < a$. Z tych aksjomatów wynika, że również nigdy nie zachodzi jednocześnie $a < b$ i $b < a$. Jeżeli relacja $<$ jest porządkiem częściowym na zbiorze X , to parę $(X, <)$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub krótko *posetem* (ang. *partially ordered set*). Zbiór liczb całkowitych $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, w którym $a < b$ oznacza, że a dzieli b i $a \neq b$, jest bez wątpienia przykładem posetu.

Mówimy, że element b *pokrywa* element a w posecie $(X, <)$, jeżeli $a < b$ i dla żadnego elementu $c \in X$ nie zachodzi $a < c < b$. *Diagramem* posetu $P = (X, <)$ nazywamy graf skierowany $D(P)$ na zbiorze wierzchołków X , w którym rysujemy łuk od a do b wtedy i tylko wtedy, gdy b pokrywa a . Rysując diagram posetu, kierujemy krawędzie w górę, tak aby otrzymać charakterystyczny obraz porządku wyróżniający odpowiednio poziomy elementów zbioru X . Wówczas $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w diagramie $D(P)$ ścieżka wznosząca się w górę od a do b . Na rysunku 1 widzimy diagram posetu dzielników liczby 12.



Rys. 1

Zauważmy, że diagram posetu można narysować na wiele sposobów, otrzymując różne rysunki grafu $D(P)$. Posety P i Q nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli ich diagramy można tak narysować, że otrzymane rysunki będą identyczne. Izomorfizm posetów P i Q oznaczamy przez $P \simeq Q$.



Rys. 2

Sformułowanie problemu

Niech $P = (X, <)$ będzie posetem i niech x będzie dowolnym elementem zbioru X . Niech P_x oznacza poset otrzymany przez usunięcie elementu x ze zbioru X . Przypuśćmy, że każdy z diagramów $D(P_x)$, $x \in X$, został narysowany na osobnej *karcie*, ale bez oznakowania wierzchołków. Kolekcję wszystkich takich kart posetu P nazywamy jego *taliją*. Zwróćmy uwagę, że talia może zawierać wiele identycznych kart, a jej liczność jest równa liczbie elementów zbioru X .

Czy mając daną talię kart pewnego posetu, możemy *zrekonstruować* go z dokładnością do izomorfizmu?

Innymi słowy, pytamy, czy jest możliwe, aby dwa różne (czyli nieizomorficzne) posety miały identyczną talię kart. Na rysunku 2 widzimy przykład takiej patologicznej pary. Przypuszcza się jednak, że zjawisko to nie występuje wśród posetów o większej liczbie elementów.

*doktorantka, Politechnika Warszawska