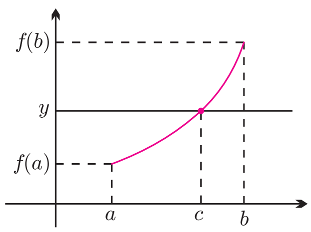
O własności Darboux

Witold BEDNAREK[*]

Na wstępie odnotujmy, że Jean Gaston Darboux (1842–1917), matematyk francuski zajmujący się przede wszystkim geometrią różniczkową, nie był odkrywcą tytułowej własności. Twierdzenie, które będziemy rozważać, sformułował i udowodnił czeski matematyk Bernard Bolzano (1781–1848), niedoceniony za życia – podstawowa jego praca, *Nauka o funkcjach*, została wydana dopiero w 1930 r.

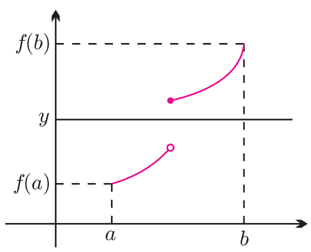
Zobacz artykuł Jerzego Mioduszewskiego „Bernard Bolzano (1781–1848), uczony i matematyk” w *Matematyce* 8/2007, str. 451–455.



Rys. 1

Twierdzenie 1 (Własność Darboux)**.** *Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas dla dowolnego y znajdującego się pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$, czyli $f(a)\leqslant y\leqslant f(b)$ lub $f(b)\leqslant y\leqslant f(a)$, istnieje takie $c\in(a,b)$, że $f(c)=y$.*

Rysunek 1 ilustruje powyższe twierdzenie. Dla funkcji nieciągłej twierdzenie 1 może być fałszywe (zob. rys. 2).



Rys. 2

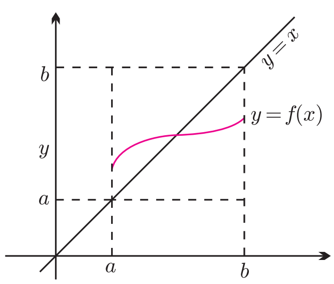
Twierdzenia 1 nie można odwrócić. Przykładem jest funkcja $f:[-1,1]\to[-1,1]$ określona wzorem

$$\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0.\end{cases}$$

Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że funkcja f ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w punkcie $x=0$. Ale pod pewnymi dodatkowymi warunkami z własności Darboux wynika ciągłość funkcji.

Twierdzenie 2. *Jeśli funkcja jest ściśle monotoniczna w przedziale domkniętym i ma własność Darboux, to jest ciągła w tym przedziale.*

Własność Darboux najczęściej znajduje zastosowanie przy badaniu istnienia i liczby miejsc zerowych funkcji ciągłych. Jeśli bowiem $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a)\cdot f(b)<0$, to $f(c)=0$ dla pewnego $c\in(a,b)$. Nierówność $f(a)\cdot f(b)<0$ to krótszy sposób zapisania alternatywy $f(a)<0$ i $f(b)>0$ lub $f(a)>0$ i $f(b)<0$. Na przykład równanie $x^4=x+1$ ma rozwiązanie w przedziale $(-1,0)$, gdyż funkcja ciągła $f(x)=x^4-x-1$ spełnia $f(-1)=1>0$ oraz $f(0)=-1<0$.

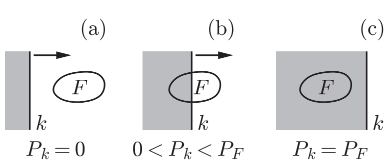


Rys. 3

Przyjmijmy teraz, że funkcja ciągła $f:[a,b]\to[a,b]$ spełnia warunki $f(a)>a$ i $f(b)<b$. Na rysunku 3 wykres funkcji f przecina prostą o równaniu $y=x$, czyli wykres funkcji identycznościowej. Istnienie punktu przecięcia tych dwóch wykresów oznacza, że równanie $f(x)=x$ ma rozwiązanie. Okazuje się, że tak jest dla dowolnej funkcji f spełniającej powyższe warunki. Oto łatwe uzasadnienie tego spostrzeżenia. Niech $g(x)=f(x)-x$ dla $x\in[a,b]$. Funkcja g, oczywiście, jest ciągła, a ponadto $g(a)=f(a)-a>a-a=0$ i $g(b)=f(b)-b<b-b=0$. Zatem istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że $g(c)=0$, czyli $f(c)=c$. Punkt c to *punkt stały* funkcji f.

Powyższe spostrzeżenie ma dalekosiężne uogólnienie – twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

Twierdzenie 3. *Niech B będzie n-wymiarową kulą domkniętą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $T:B\to B$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas istnieje taki punkt $c\in B$, że $T(c)=c$ (punkt stały odwzorowania T).*



Rys. 4

Okazuje się, że własność Darboux można zastosować również w geometrii elementarnej. Oto przykład: każdą figurę płaską o niepustym wnętrzu, domkniętą i ograniczoną, można podzielić prostą na dwie części o równych polach. Niech bowiem P_F oznacza pole figury F, P_k zaś oznacza pole części wspólnej figury F i półpłaszczyzny o krawędzi k (po lewej stronie prostej k). Przesuwając prostą k od lewej do prawej (zob. rys. 4), mamy na początku $P_k=0$, a na końcu $P_k=P_F$. Pole P_k jest ciągłą funkcją długości wektora przesunięcia, więc dla pewnej prostej k_0 zachodzi równość $P_{k_0}=\frac{1}{2}P_F$.

Znacznie trudniej jest wykazać, że na płaszczyźnie istnieje prosta dzieląca jednocześnie na połowy pola dwóch figur. Natomiast dla trzech figur taka prosta zazwyczaj nie istnieje. Prosty kontrprzykład to trzy koła o niewspółliniowych środkach.

Powyższe stwierdzenie można przenieść na wyższe wymiary. Dla wymiaru 3 jest to znane *twierdzenie o podziale kanapki*.

Twierdzenie 3. *Jeśli na kromce chleba umieścimy w dowolny sposób masło i ser, to można jednym (płaskim) cięciem przepołowić wszystkie trzy składniki kanapki (tzn. ich objętość).*

Dla ogólnej kanapki, zawierającej przynajmniej cztery składniki, twierdzenie nie jest prawdziwe. Być może dlatego matematycy nie przypisują większego znaczenia urokom sztuki kulinarnej.

[*]nauczyciel liceum i gimnazjum w Łodzi