Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 575 ($WT = 2{,}18$) i 576 ($WT = 1{,}55$) z numeru 2/2009

Krzysztof Dorobisz	Kraków	47,00
Andrzej Idzik	Bolesławiec	44,70
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Paweł Najman	Jaworzno	38,98
Jerzy Cisło	Wrocław	35,48
Janusz Olszewski	Warszawa	34,01

Zamykając trzecią rundę, Krzysztof Dorobisz powiększył liczbę Weteranów Klubu 44M do 33 ($= \frac{3}{4} \cdot 44$).

Miejsce w Klubie matematycznym znalazł dla siebie także Andrzej Idzik, równolegle do sukcesów odnoszonych w Lidze fizycznej.

Zadania z matematyki nr 587, 588

Redaguje Marcin E. KUCZMA

587. Dana jest liczba dodatnia $a \leqslant 1/2$. Określamy ciąg (x_n) wzorami:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n - a x_n^2 \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Dowieść, że ciąg (nx_n) jest zbieżny, i obliczyć jego granicę.

588. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ równanie

$$x^2 + xy + y^2 = 13^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

Zadanie 588 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2009

Przypominamy treść zadań:

583. Rozważamy wielomian

$$P(x) = (1 + x^{43} + x^{44} + x^{45})^{44} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{1980} x^{1980}.$$

Obliczyć sumę $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{1980}$ tych współczynników, których numery dzielą się przez 3.

584. Dla liczb dodatnich a, b, c przyjmijmy

$$U = a^2b + b^2c + c^2a, \qquad V = ab^2 + bc^2 + ca^2,$$
$$A = a^3 + abc, \qquad B = b^3 + abc, \qquad C = c^3 + abc.$$

Udowodnić, że $\sqrt{UV} \geqslant abc + \sqrt[3]{ABC}$.

583. Oznaczmy badaną sumę przez s. Tak więc

$$\sum_{k\equiv 0} a_k = s \quad \text{oraz} \quad \sum_{k\not\equiv 0} a_k = P(1) - s;$$

wszystkie kongruencje w tym rozwiązaniu są brane (mod 3).

Niech α i β będą nierzeczywistymi pierwiastkami trzeciego stopnia z jedności:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \qquad \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}.$$

Ponieważ $\alpha^3 = \beta^3 = \alpha\beta = 1$, więc

$$\alpha^k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \equiv 0, \\ \alpha & \text{dla } k \equiv 1, \\ \beta & \text{dla } k \equiv 2, \end{cases} \qquad \beta^k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \equiv 0, \\ \beta & \text{dla } k \equiv 1, \\ \alpha & \text{dla } k \equiv 2. \end{cases}$$

A skoro $\alpha + \beta = -1$, to

$$\alpha^k + \beta^k = \begin{cases} 2 & \text{dla } k \equiv 0, \\ -1 & \text{dla } k \not\equiv 0. \end{cases}$$

Stąd

$$P(\alpha) + P(\beta) = \sum_{k\equiv 0} a_k(\alpha^k + \beta^k) + \sum_{k\not\equiv 0} a_k(\alpha^k + \beta^k) =$$
$$= 2s - (P(1) - s) = 3s - 4^{44}.$$

Z drugiej strony,

$$P(\alpha) = (1 + \alpha + \beta + 1)^{44} = 1,$$

i tak samo

$$P(\beta) = 1.$$

Z uzyskanych związków wyznaczamy $s = (4^{44} + 2)/3$.

584. Wobec jednorodności (sześciennej) wyrażeń A, B, C, U, V można przyjąć, że $abc = 1$. Nietrudno sprawdzić, że wówczas

$$UV = W + 3 \quad \text{oraz} \quad ABC = W + 2,$$

gdzie

$$W = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3 + b^3 + c^3.$$

Skoro $abc = 1$, to $W \geqslant 3 + 3 = 6$ (nierówności średnich). Przepisujemy więc nierówność z tezy zadania jako

$$\sqrt{W+3} \geqslant 1 + \sqrt[3]{W+2}.$$

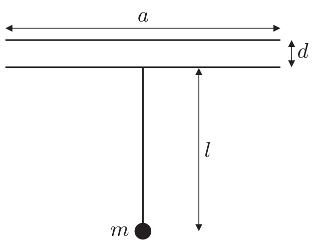
Przyjmijmy oznaczenie $X = \sqrt[3]{W+2}$; zatem $X \geqslant 2$. Dowodzona nierówność przybiera postać

$$\sqrt{X^3 + 1} \geqslant X + 1;$$

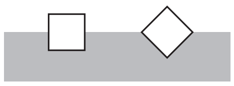
równoważnie: $X^2 \geqslant X + 2$. Dla $X \geqslant 2$ jest to prawda.

Klub 44

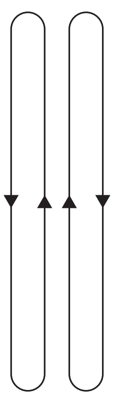
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2009



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 474 ($WT = 2{,}56$) i 475 ($WT = 2{,}02$) z numeru 3/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	42,24
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,42
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,37
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	28,18
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,47
Michał Koźlik	Gliwice	18,13

Zadania z fizyki nr 484, 485

Redaguje Jerzy B. BROJAN

484. Okładki kondensatora są prostokątami o wymiarach a i b, a odległość między ich środkami jest równa d, przy czym $d \ll a$, $d \ll b$. Górna okładka jest pozioma i nieruchoma, a dolna może się obracać wokół osi równoległej do boku b i przechodzącej przez jej środek. Dolna okładka jest sztywno połączona z prętem o długości l, na końcu którego znajduje się ciężarek o masie m (rys. 1). Naładowano kondensator do napięcia U. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby pionowe położenie pręta (kiedy okładki są równoległe) było położeniem równowagi trwałej?

485. Mamy trzy jednakowe ciała, których ciepło właściwe jest stałe (nie zależy od temperatury), a temperatury wynoszą 100 K, 200 K i 300 K. Do jakiej maksymalnej temperatury można ogrzać jedno z tych ciał, jeśli energia przepływa tylko między nimi, przy czym możemy wykorzystywać maszyny cieplne?

Rozwiązania zadań z numeru 6/2009

Przypominamy treść zadań:

480. Powierzchnia długiego walca o promieniu r jest przewodząca. Po tej powierzchni wzdłuż osi walca płynie prąd o natężeniu I, o gęstości stałej wzdłuż obwodu walca. Jakie ciśnienie p powstaje wewnątrz walca wskutek wzajemnego przyciągania się elementów powierzchni? Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1.

481. Długi jednorodny pręt o przekroju kwadratowym, wykonany z materiału o gęstości 0,5 g/cm^3, leży na powierzchni wody. Która z przedstawionych na rysunku 2 pozycji jest położeniem równowagi trwałej, czy też obie?

480. Rozważmy przemianę energii przy niewielkiej zmianie promienia walca. Aby uniknąć uwzględniania energii dostarczonej przez źródło zasilania, przyjmijmy, że obwód jest zamknięty zewnętrznym walcem o promieniu R (zob. rys. 3) i bezoporowy – wtedy strumień pola magnetycznego Φ pozostaje stały, a praca objętościowa jest równa zmianie energii pola

$$pdV = pl \cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \mathrm{d}E_m,$$

gdzie l jest długością walców. Pole magnetyczne występuje tylko w obszarze między walcami, jego indukcja jest dana wzorem

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r'}, \qquad r < r' < R,$$

a strumień obliczamy jako całkę

$$\Phi = l\int_r^R B\mathrm{d}r' = \frac{\mu_0}{2\pi} lI\ln(R/r).$$

Z warunku $\Phi = \mathrm{const}$ wyprowadzamy związek między niewielkimi przyrostami $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}I$:

$$\ln(R/r)\mathrm{d}I = (I/r)\mathrm{d}r.$$

Gęstość energii pola magnetycznego w próżni jest dana wyrażeniem $B^2/2\mu_0$, zatem całkowitą energię pola w obszarze między walcami obliczamy jako

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\mathrm{d}V = \frac{2\pi l}{2\mu_0}\int_r^R B^2 r'\mathrm{d}r' = \frac{\mu_0}{4\pi} lI^2\ln(R/r).$$

Uwzględniając związek między przyrostami $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}I$, obliczamy

$$\mathrm{d}E_m = \frac{\mu_0 lI^2}{4\pi r}\mathrm{d}r, \quad \text{a stąd} \quad p = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{I^2}{r^2}.$$

Zauważmy, że pomijając warunek $\Phi = \mathrm{const}$ i wynikającą z niego zmianę natężenia prądu, otrzymalibyśmy wynik pozornie prawidłowy, ale w istocie błędny: wzrost promienia r oznaczałby bowiem zmniejszenie obszaru pola magnetycznego i zmniejszenie jego energii. To by oznaczało, że elementy powierzchni walca nie powinny się przyciągać, lecz odpychać (niezgodnie z rzeczywistością).

481. W obu pozycjach środek masy prętów leży na tej samej wysokości (na powierzchni wody), więc energia grawitacyjna prętów jest jednakowa. Dla lewej pozycji środek masy części zanurzonej leży jednak niżej, czyli środek masy wody – wyżej. Energia grawitacyjna wody jest niższa dla prawej pozycji, zatem to ona przedstawia równowagę trwałą.

Ściśle rzecz biorąc, samo porównanie dwóch energii potencjalnych nie rozstrzyga jednoznacznie kwestii rodzaju położenia równowagi (energia mogłaby być dowolnie skomplikowaną funkcją kąta przechyłu, z większą liczbą ekstremów). Bardziej precyzyjną metodę analizy równowagi ciał pływających przedstawiono w rozwiązaniu zadania 223, *Delta* 1/1997.