Gry

Joanna JASZUŃSKA

W wielu grach dla któregoś z graczy istnieje *strategia wygrywająca*, czyli taka „recepta” na grę, która pozwala zawsze zwyciężyć, niezależnie od ruchów przeciwnika. Jednak strategię taką, nawet jeśli istnieje, nie zawsze łatwo wskazać. Na szczęście często można. Czasem wystarczą do tego proste pomysły typu symetria, czasem zaś potrzebne są metody bardziej wyrafinowane.
W niektórych grach nawet bez żadnej strategii wynik jest z góry przesądzony. Ilustrują to poniższe przykłady.

W każdej tego typu skończonej grze bez remisów, bez elementów losowych (typu rzuty kostką), w której obaj gracze mają pełną wiedzę (żaden, na przykład, nie ukrywa swoich kart), dla któregoś z nich istnieje strategia wygrywająca.

Gracza rozpoczynającego oznaczamy G_{I}, drugiego G_{II}. Wykonują oni ruchy na przemian, według podanych reguł. Jeśli nie jest powiedziane inaczej, przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Należy rozstrzygnąć, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą (lub przynajmniej nieprzegrywającą, gdy gra dopuszcza remisy), i wskazać ją.

1. Na okrągłym stoliku gracze kładą złotówki, przy czym nie mogą one wystawać poza stolik ani nachodzić na siebie oraz nie wolno przesuwać leżących już monet.

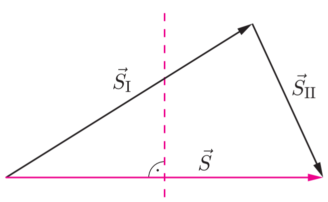
R. Wygrywa G_{I}: umieszcza pierwszą złotówkę na środku stolika, po czym na każdy ruch przeciwnika odpowiada, kładąc monetę symetrycznie względem środka. Jeśli G_{II} znalazł miejsce na monetę, to G_{I} też znajdzie – miejsce symetryczne jest wolne. □

2. Gracze rysują takie przekątne 12-kąta foremnego, które się nie przecinają.

R. Wygrywa G_{I}. Może zacząć od narysowania jednej z głównych przekątnych i na każdy ruch przeciwnika odpowiadać ruchem symetrycznym względem niej. □

Co więcej, G_{I} wygrywa nawet bez żadnej strategii, gdyż gra zawsze trwa 9 ruchów. Zauważ, że n-kąt foremny ma $n-3$ nieprzecinające się przekątne.

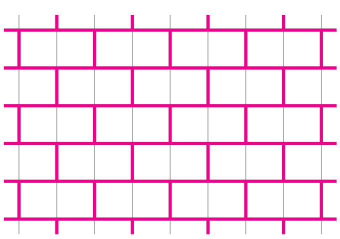
3. Na płaszczyźnie danych jest 20 wektorów. Gracze wybierają po jednym z nich. Wygrywa ten, kto na końcu ma dłuższą sumę wybranych wektorów.



Rys. 1

R. Oznaczmy przez $\vec{S}_{\mathrm{I}}$ i $\vec{S}_{\mathrm{II}}$ sumy wektorów wybranych przez graczy, a przez $\vec{S}$ sumę danych wektorów: $\vec{S}=\vec{S}_{\mathrm{I}}+\vec{S}_{\mathrm{II}}$. Jeśli $\vec{S}=0$, to gra kończy się remisem, bo $\vec{S}_{\mathrm{I}}=-\vec{S}_{\mathrm{II}}$. Jeśli $\vec{S}\neq 0$, to wektory $\vec{S}$, $\vec{S}_{\mathrm{I}}$ i $\vec{S}_{\mathrm{II}}$ tworzą trójkąt (rys. 1) – być może zdegenerowany. Stąd $|\vec{S}_{\mathrm{I}}|>|\vec{S}_{\mathrm{II}}|$ wtedy i tylko wtedy, gdy koniec wektora $\vec{S}_{\mathrm{I}}$ znajduje się po tej samej stronie symetralnej wektora $\vec{S}$, co koniec $\vec{S}$. Strategią dla G_{I} jest zatem maksymalizowanie składowej $\vec{S}_{\mathrm{I}}$ w kierunku $\vec{S}$, czyli spośród dostępnych wektorów branie zawsze takiego o największej składowej w kierunku $\vec{S}$. Wygrywa lub remisuje, bo G_{II} bierze zawsze wektor o co najwyżej równie dużej składowej w tym kierunku i łącznie ma tyle samo wektorów. Gdy gra jest remisowa, żadna inna strategia nie zagwarantowałaby G_{I} wygranej. □

4. Gracze stawiają pionki, po jednym, na polach nieskończonej szachownicy. Gracz wygrywa, jeżeli utworzy ze swoich pionków kwadrat 2×2.



Rys. 2

R. Pokolorujmy szachownicę w *mur* (rys. 2). Każdy kwadrat 2×2 zawiera w całości pewną *cegłę* 2×1. Jeśli G_{II} zawsze wstawia swój pionek, złośliwie, do tej samej cegły, w której właśnie zagrał G_{I}, to G_{I} nie może wygrać. Jest to więc strategia nieprzegrywająca dla G_{II}. Pozostawiam Czytelnikom podobne sprawdzenie, że G_{II} nie ma strategii wygrywającej. □

Zadania domowe:

5. Planszą do gry są wierzchołki trójkąta oraz 7 punktów z jego wnętrza, żadne trzy punkty planszy nie są współliniowe. Gracze rysują nieprzecinające się odcinki łączące dwa z danych 10 punktów.

Wskazówka. Po grze plansza staje się grafem planarnym o trójkątnych ścianach. Wykorzystaj fakt, że $2k=3s$, oraz wzór Eulera $w-k+s=2$, gdzie $w=10$ to liczba punktów planszy, k – liczba narysowanych odcinków, zaś s – liczba ścian (wliczając też ścianę zewnętrzną).

6. Dana jest tablica 2008×2008. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej. Zbadaj, czy dla gracza rozpoczynającego grę istnieje strategia zapewniająca mu zwycięstwo.
Zadanie pochodzi z tegorocznej, LX Olimpiady Matematycznej. Rozwiązanie na stronie `www.om.edu.pl`