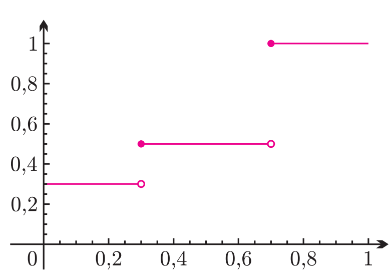
Czy naprawdę *prawie* robi wielką różnicę?

Paulina MAŁOLEPSZA, Tomasz MAŁOLEPSZY[*]

Jednym z fundamentalnych pojęć analizy matematycznej jest bez wątpienia różniczkowalność. Dla funkcji jednej zmiennej, określonej na pewnym otwartym przedziale, równoważna jest ona istnieniu pochodnej funkcji w każdym punkcie tego przedziału. Jak wiadomo, wszystkie funkcje elementarne są różniczkowalne w tym klasycznym sensie, jednak wiele innych prostych i zarazem użytecznych funkcji już nie. Przykładem jest chociażby funkcja $y = |x|$, dla której wszystko psuje się w zerze, w którym pochodna nie istnieje. Okazuje się jednak, że można tak osłabić pojęcie różniczkowalności, że wyżej wspomniana funkcja będzie już różniczkowalna w tym nowym sensie. Wystarczy w tym celu wziąć pod uwagę tzw. różniczkowalność prawie wszędzie. Cóż to oznacza? Pojęcie *prawie wszędzie* (będziemy też pisać p.w.) jest krótszym określeniem na sformułowanie „wszędzie poza zbiorem (jednowymiarowej) miary Lebesgue'a zero". Wymyślona na początku XX wieku przez Henri Lebesgue'a koncepcja miary, nazwanej później jego nazwiskiem, jest niczym innym jak uogólnieniem pojęcia długości przedziału. Dzięki tej mierze można jednak mierzyć dodatkowo „długości" wielu innych zbiorów zawartych w prostej. Można np. zmierzyć „długość" punktu (jego miara to zero), zbioru liczb naturalnych w $\mathbb{R}$ (miara tego zbioru jest również równa zeru) lub „długość" zbioru liczb niewymiernych w $[0, 1]$ (miara w tym przypadku wynosi jeden). Intuicyjnie czujemy, że jeżeli miara Lebesgue'a jakiegoś zbioru wynosi 0, to musi on być „bardzo mały". I choć dopuszczenie do sytuacji, że funkcja nie musi być różniczkowalna na takim „małym" zbiorze, wpłynie z pewnością na jej zachowanie i własności, to czy skutkiem tego może być radykalna zmiana faktów znanych nam z klasycznej analizy matematycznej?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, na początku odnotujmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Jedyną funkcją f ciągłą w przedziale $[0, 1]$ oraz spełniającą wszędzie w przedziale $(0, 1)$ warunek $f'(x) = 0$ jest funkcja stała.*



Rys. 1

Czy to twierdzenie pozostanie prawdziwe, gdy w miejsce słowa „wszędzie" wstawimy „prawie wszędzie"? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że tak. Oczywiście, można z łatwością podać (patrz rysunek 1) przykład niemalejącej funkcji różniczkowalnej prawie wszędzie o pochodnej równej zeru, która nie jest stała, ale tę monotoniczność uzyskaliśmy za cenę nieciągłości funkcji. Czy jednak mimo wszystko mogą istnieć różne od stałej CIĄGŁE funkcje różniczkowalne p.w. o pochodnej równej zeru, które są, powiedzmy, niemalejące? I choć intuicja podpowiada, że takich obiektów matematycznych nie ma, to jak powiedział brytyjski matematyk Edward Titchmarsh „być może najbardziej zaskakujące w matematyce jest to, że jest tak zaskakująca". Tak, są takie funkcje! Jedną z nich jest funkcja Cantora (zwana też funkcją Cantora–Lebesgue'a), pochodząca z 1883 roku. Do jej zdefiniowania będzie nam potrzebny tzw. zbiór Cantora. Przypomnijmy jego konstrukcję.

Zaczynamy od odcinka $[0, 1]$. Dzielimy go na trzy podprzedziały równej długości i środkowy z nich, otwarty, oznaczamy przez I_1^1. W kolejnym kroku pozostałe dwa przedziały również dzielimy na trzy podprzedziały każdy i środkowe z nich, otwarte, oznaczamy przez I_2^1 oraz I_2^2. W kolejnych krokach powtarzamy tę procedurę, tzn. po n-tym kroku otrzymujemy 2^{n-1} przedziałów otwartych I_n^i, $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$, o długości $\frac{1}{3^n}$ każdy. Zbiór Cantora określamy wówczas jako zbiór C postaci

$$C = [0, 1] \setminus G,$$

gdzie

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_n^i.$$

Zbiór Cantora ma intrygujące własności. Przede wszystkim jest przykładem domkniętego zbioru nieprzeliczalnego miary Lebesgue'a zero. Co więcej, należą do niego tylko i wyłącznie te liczby z przedziału $[0, 1]$, które da się przedstawić w systemie trójkowym bez użycia 1.

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Oznaczmy teraz

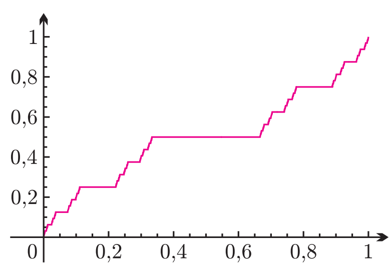
$$G_k = \bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_n^i.$$

Dla dowolnego naturalnego k zdefiniujmy funkcję $f_k : [0,1] \to [0,1]$ następująco:

$$f_k(0) = 0, \qquad f_k(1) = 1,$$

$$f_k(x) = \frac{2i-1}{2^n} \quad \text{dla } x \in \overline{I_n^i}, \qquad \text{gdzie } n = 1,\ldots,k,\ i = 1,\ldots,2^{n-1}$$

($\overline{I_n^i}$ oznacza domknięcie zbioru I_n^i), natomiast w domknięciach przedziałów dopełniających zbiór $\overline{G}_k$ do przedziału $[0,1]$ określmy funkcję f_k jako ciągłą i liniową, tak aby w całym przedziale $[0,1]$ funkcja f_k była ciągła. Funkcja f_k będzie więc niemalejąca i ciągła w $[0,1]$. Co istotne, można wykazać, że ciąg funkcyjny $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, a więc jego granica f_C istnieje i jest funkcją ciągłą. Granicę tę nazywamy właśnie funkcją Cantora. Jest ona niemalejąca (bo wszystkie f_k są niemalejące) oraz stała w każdym z przedziałów I_n^i. Stąd wynika od razu, że poza zbiorem Cantora funkcja f_C ma pochodną równą 0. Widzimy więc, że istnieje funkcja ciągła, która jest określona na przedziale długości 1 i której pochodna na zbiorze miary 1 jest równa 0, a mimo to nie jest funkcją stałą. Co więcej, przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy 0 i 1! Zaiste, dziwna jest ta funkcja. Zresztą czasami nazywa się ją również, ze względu na nieskończoną ilość „schodków” (czyli tych fragmentów jej wykresu, na których jest stała), „diabelskimi schodami”, co także podkreśla jej nieoczekiwane własności. Z drugiej strony jednak, skoro istnieje taka funkcja jak funkcja Cantora, to może warto zapytać, czy istnieje określona w przedziale $[0,1]$ ŚCIŚLE monotoniczna funkcja CIĄGŁA, która prawie wszędzie w $(0,1)$ będzie miała pochodną równą 0? I tu, co zaskakujące, odpowiedź jest twierdząca! W literaturze znanych jest wiele funkcji o tej własności (np. funkcje Riesza–Nagy'a), jednak tutaj podamy przykład chyba najsłynniejszej wśród nich, a mianowicie funkcji Minkowskiego $\mathbf{?}(x)$, która po raz pierwszy na kartach historii matematyki pojawia się w 1904 roku. Można ją określić na wiele sposobów. My do tego celu wykorzystamy ułamki łańcuchowe. Przypomnijmy, że każdą liczbę rzeczywistą x można przedstawić w postaci

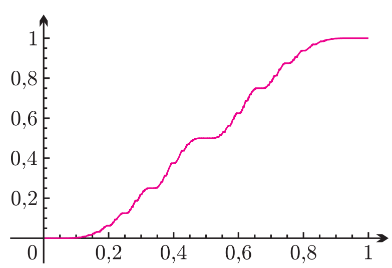


Rys. 2. Funkcja Cantora.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

(przedstawienie to w skrócie można zapisać również jako $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$), gdzie $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Co istotne, każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno takie przedstawienie (w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego), dowolną zaś liczbę wymierną można zapisać w dwóch postaciach: krótszej $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, gdzie $a_n \neq 1$, lub dłuższej $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1]$. Oznaczmy $R_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$. Wówczas na przedziale $[0,1]$ funkcja Minkowskiego (zwana po angielsku *question mark*) zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{?}(x) = \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{R_i}} & \text{dla } x \text{ wymiernych oprócz } 1, \\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{R_i}} & \text{dla } x \text{ niewymiernych}, \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$



Rys. 3. Funkcja Minkowskiego.

Wykazanie, że $\mathbf{?}(x)$ ma wymagane przez nas własności, czyli ciągłość, ścisłą monotoniczność, pochodną prawie wszędzie równą 0, jest o wiele trudniejsze niż w przypadku funkcji Cantora. Niemniej jednak fakt istnienia takiej funkcji pozwala nam sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Istnieją ściśle monotoniczne funkcje ciągłe f określone w przedziale $[0,1]$ oraz spełniające prawie wszędzie w przedziale $(0,1)$ warunek $f'(x) = 0$.*

Jak widać, zmiana jakościowa między twierdzeniami 1 i 2 jest znaczna. Zatem także w matematyce *prawie* potrafi zrobić wielką różnicę…