I choć przy obliczaniu pierwszej sumy będzie trzeba wszystkie te bloki ściągnąć do pamięci cache, to przy obliczaniu sumy `tab[i+1][j+1]`,`tab[i+2][j+1]`, . . . ,`tab[i+20][j+1]` odpowiednie bloki będą się już znajdować w pamięci podręcznej, dzięki czemu program nie straci cennych nanosekund.

Być może ktoś powie, że nie warto się w to wszystko w ogóle zagłębiać, gdyż przyspieszamy program jedynie o stały czynnik. Jednak nakład pracy, jaki włożyliśmy w zmianę programów, był minimalny. Jeśli mamy program działający 10 godzin, a potrzebujemy otrzymać wynik w ciągu godziny, to owszem – możemy kupić dziesięciokrotnie szybszy komputer. Ale czasami możemy zaoszczędzić dużo pieniędzy, po prostu zamieniając kilka linijek miejscami i dodając kilka pozornie nieistotnych znaków w odpowiednich miejscach programu.

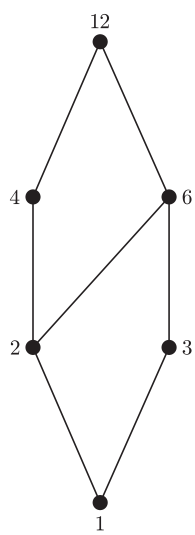
Na koniec małe ćwiczenie dla Ciebie, Drogi Czytelniku. Otwórz swoją ulubioną wyszukiwarkę internetową i wyszukaj „mnożenie macierzy C++”. Wejdź na pierwszą lepszą stronę. Czy implementacja, którą znalazłeś, jest napisana optymalnie z punktu widzenia działania mechanizmu cache? Czy można ją przyspieszyć, używając metod opisanych w tym artykule? Jak to zrobić?

# Co to znaczy zrekonstruować porządek?

*Marta PRZYBOROWSKA*[*]

W tym artykule przedstawimy problem rekonstrukcji zbioru częściowo uporządkowanego. Będziemy rozważać jedynie zbiory skończone. Do sformułowania problemu będziemy potrzebować kilku podstawowych pojęć.

*Porządkiem częściowym* na zbiorze $X$ nazywamy relację $<$ spełniającą własność przechodniości i przeciwzwrotności. Mówiąc, że relacja $<$ jest *przechodnia*, mamy na myśli, że jeżeli $a, b, c$ są takimi elementami zbioru $X$, że $a < b$ i $b < c$, to również $a < c$. *Przeciwzwrotność* relacji $<$ oznacza, że nigdy nie zachodzi $a < a$. Z tych aksjomatów wynika, że również nigdy nie zachodzi jednocześnie $a < b$ i $b < a$. Jeżeli relacja $<$ jest porządkiem częściowym na zbiorze $X$, to parę $(X, <)$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub krótko *posetem* (ang. *partially ordered set*). Zbiór liczb całkowitych $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, w którym $a < b$ oznacza, że $a$ dzieli $b$ i $a \neq b$, jest bez wątpienia przykładem posetu.



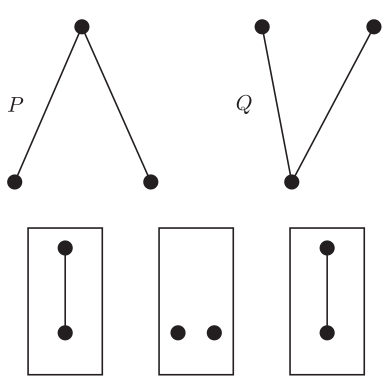

Rys. 1

Mówimy, że element $b$ *pokrywa* element $a$ w posecie $(X, <)$, jeżeli $a < b$ i dla żadnego elementu $c \in X$ nie zachodzi $a < c < b$. *Diagramem* posetu $P = (X, <)$ nazywamy graf skierowany $D(P)$ na zbiorze wierzchołków $X$, w którym rysujemy łuk od $a$ do $b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b$ pokrywa $a$. Rysując diagram posetu, kierujemy krawędzie w górę, tak aby otrzymać charakterystyczny obraz porządku wyróżniający odpowiednie poziomy elementów zbioru $X$. Wówczas $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w diagramie $D(P)$ ścieżka wznosząca się w górę od $a$ do $b$. Na rysunku 1 widzimy diagram posetu dzielników liczby 12.

Zauważmy, że diagram posetu można narysować na wiele sposobów, otrzymując różne rysunki grafu $D(P)$. Posety $P$ i $Q$ nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli ich diagramy można tak narysować, że otrzymane rysunki będą identyczne. Izomorfizm posetów $P$ i $Q$ oznaczamy przez $P \simeq Q$.

## Sformułowanie problemu

Niech $P = (X, <)$ będzie posetem i niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $X$. Niech $P_x$ oznacza poset otrzymany przez usunięcie elementu $x$ ze zbioru $X$. Przypuśćmy, że każdy z diagramów $D(P_x)$, $x \in X$, został narysowany na osobnej *karcie*, ale bez oznakowania wierzchołków. Kolekcję wszystkich takich kart posetu $P$ nazywamy jego *talią*. Zwróćmy uwagę, że talia może zawierać wiele identycznych kart, a jej liczność jest równa liczbie elementów zbioru $X$.




talia posetów $P, Q$

Rys. 2

Czy mając daną talię kart pewnego posetu, możemy *zrekonstruować* go z dokładnością do izomorfizmu?

Innymi słowy, pytamy, czy jest możliwe, aby dwa różne (czyli nieizomorficzne) posety miały identyczną talię kart. Na rysunku 2 widzimy przykład takiej patologicznej pary. Przypuszcza się jednak, że zjawisko to nie występuje wśród posetów o większej liczbie elementów.

[*]doktorantka, Politechnika Warszawska

**Hipoteza 1.** *Każdy zbiór częściowo uporządkowany o co najmniej czterech elementach jest rekonstruowalny na podstawie swojej talii kart.*

Powyższa hipoteza jest posetową wersją słynnego problemu rekonstrukcji grafów z 1929 r. autorstwa Stanisława Ulama. Pomimo sporych wysiłków pozostaje jak dotąd otwarta.

## Przykłady rekonstrukcji

Elementem *minimalnym* w posecie $P = (X, <)$ nazywamy taki element $a$, że nie zachodzi $x < a$ dla żadnego $x \in X$. Elementem *najmniejszym* posetu $P$ nazywamy taki element $b$, że $b < x$ dla każdego $x \in X - b$. Widzimy, że element najmniejszy jest zarazem minimalny, ale nie musi być na odwrót. Poset może zawierać wiele elementów minimalnych i wtedy nie ma elementu najmniejszego.

**Twierdzenie 1.** *Zbiory częściowo uporządkowane z najmniejszym elementem są rekonstruowalne.*

*Dowód.* Rozważmy talię $n$-elementowego posetu $P$ $(n \geqslant 4)$. Zauważmy, że jeśli $P$ ma element najmniejszy $a$, to pojawi się on we wszystkich $n-1$ kartach posetów $P_x$, $x \neq a$. Jeśli natomiast $P$ nie ma elementu najmniejszego, to ma co najmniej dwa elementy minimalne, czyli co najwyżej dwie karty $P$ będą miały element najmniejszy. Zatem na podstawie ilości kart z najmniejszym elementem możemy rozpoznać, czy rozważany zbiór ma element najmniejszy, czy go nie ma.

Pozostaje sposób rekonstrukcji. Wiemy już, że $P$ ma element najmniejszy $a$. Należy odnaleźć kartę, w której usuniętym elementem było właśnie $a$. Jak to zrobić? Spośród kart wybierzmy taką, która na jak najniższym poziomie diagramu ma najwięcej elementów, ale co najmniej dwa (jeśli takiej nie ma, to porządek $P$ jest liniowy). Do tej karty dokładamy najmniejszy element $a$ i w ten sposób otrzymujemy rekonstrukcję zbioru $P$. $\square$

Analogicznie można dowieść rekonstruowalności posetów z największym elementem.

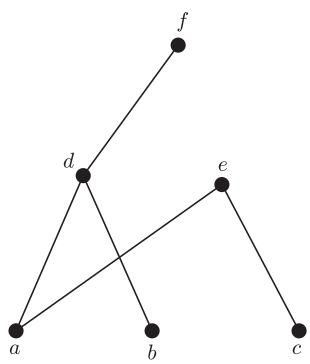
Do elementarnych dowodów należy również pokazanie, że wysokość i szerokość posetu są parametrami rekonstruowalnymi. *Łańcuchem* w posecie $P$ nazywamy zbiór elementów parami porównywalnych, natomiast *antyłańcuchem* nazywamy zbiór, którego żadne dwa elementy nie są porównywalne. *Wysokość* posetu $h(P)$ równa jest liczności najdłuższego łańcucha w nim zawartego minus jeden. *Szerokość* posetu $w(P)$ równa jest liczności najliczniejszego antyłańcucha w nim zawartego.

**Twierdzenie 2.** *Szerokość i wysokość posetu są rekonstruowalne.*

*Dowód.* O zbiorze $P$ załóżmy, że nie jest łańcuchem i nie jest antyłańcuchem. Niech $C$ będzie najliczniejszym łańcuchem w $P$. Z założenia istnieje w $P$ punkt $x \notin C$, stąd $h(P) = h(P - x)$. A zatem wysokość zbioru $P$ równa jest maksimum wysokości kart zbioru $P$.

Niech teraz $A$ będzie najliczniejszym antyłańcuchem w $P$. Ponieważ $P$ nie jest antyłańcuchem, więc istnieje w $P$ punkt $y \notin A$. Zatem $A$ jest najliczniejszym antyłańcuchem również w zbiorze $P - y$, czyli $w(P) = w(P - y)$. Stąd wnioskujemy, że szerokość zbioru $P$ jest równa maksimum szerokości kart zbioru $P$. $\square$

Powyższe rozważania na temat rekonstrukcji zbiorów należy uzupełnić o listę innych znanych klas skończonych rekonstruowalnych zbiorów częściowo uporządkowanych. Są to, między innymi, zbiory niespójne, zbiory o niespójnym grafie nieporównywalności, zbiory szerokości 2, łańcuchy i antyłańcuchy. Warto nadmienić także, że istnieją zbiory nieskończone, które nie są rekonstruowalne. Może Czytelnik spróbuje znaleźć przykład?




Rys. 3. Na rysunku przedstawiono 6-elementowy zbiór częściowo uporządkowany $P$. Łańcuchami w $P$ są podzbiory: $\{a, d, f\}$, $\{a, d\}$, $\{a, f\}$, $\{d, f\}$, $\{a, e\}$, $\{b, d, f\}$, $\{b, d\}$, $\{b, f\}$, $\{c, e\}$. Antyłańcuchami w $P$ są podzbiory: $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{d, e\}$, $\{d, c\}$, $\{e, b\}$, $\{f, e\}$, $\{f, c\}$. Najliczniejszy łańcuch wyznacza wysokość posetu: $h(P) = 2$. Najliczniejszy antyłańcuch wyznacza szerokość posetu: $w(P) = 3$. Elementy $a$, $b$, $c$ są minimalne, co oznacza, że zbiór nie ma elementu najmniejszego.