Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Ułamki proste...

... to takie, których licznikiem jest 1, a mianownik jest liczbą całkowitą większą od 1.

Egipcjanie z bliżej nieznanych powodów uważali, że wszystkie ułamki pomiędzy 0 i 1 należy przedstawiać w postaci sumy różnych ułamków prostych. Okazuje się, że zawsze da się to zrobić.

Rozkład na różne ułamki proste

Oto algorytm: od ułamka, który chcemy rozłożyć, odejmujemy największy mniejszy od niego ułamek prosty. Operację powtarzamy dla otrzymanej różnicy, aż do chwili, gdy i ona jest ułamkiem prostym. Algorytm ten ma własność stopu, bo liczniki kolejnych różnic są coraz mniejsze (dlaczego?), więc w końcu muszą stać się jedynką.

Przykład:
$9/19 - 1/3 = (27-19)/(19\cdot 3) = 8/57$,
$8/57 - 1/8 = (64-57)/(57\cdot 8) = 7/456$,
$7/456 - 1/66 = (462-456)/(456\cdot 66) = 6/(456\cdot 66) =$
$= 1/(456\cdot 11) = 1/5016$.

Zatem
$$\frac{9}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016}.$$

Rozkład nie jest jednoznaczny, bowiem np.
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$
co pozwala liczbę składników dowolnie powiększać.

Podany algorytm pozwala rozłożyć ułamek k/n na nie więcej niż k ułamków prostych. Podany przykład pokazuje jednak, że zdarza się (wskutek skrócenia), iż liczba składników może być mniejsza. Stąd wywodzą się np. dwie hipotezy

Hipoteza Pála Erdősa–Ernsta G. Strausa:
dla dowolnego n ułamek $4/n$ daje się rozłożyć na sumę dokładnie trzech różnych ułamków prostych;

Hipoteza Andrzeja Schinzla:
dla dowolnego k istnieje taka liczba N, że dla $n > N$ ułamek k/n można rozłożyć na trzy ułamki proste.

W przypadku pierwszej hipotezy sprawdzono jej prawdziwość dla wszystkich $n < 10^{14}$.

Dla wprawy sprawdźcie (wskazówka jest wyżej), czy
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{19} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016} = \frac{1}{2} + \frac{1}{38}.$$

Rozwinięcia dziesiętne

Jak wiadomo, rozwinięcie dziesiętne ułamka może być skończone lub okresowe. Inne rozwinięcia zarezerwowane są dla liczb niewymiernych. Ale jak długi może być okres w takim rozwinięciu?

Każdy może sobie sprawdzić, że
$$\frac{1}{3} = 0{,}(3), \quad \frac{1}{7} = 0{,}(142857), \quad \frac{1}{11} = 0{,}(09),$$
$$\frac{1}{13} = 0{,}(076923), \quad \frac{1}{17} = 0{,}(0588235294117647).$$
Okresy liczb $1/7$ i $1/17$ mają długość odpowiednio 6 i 16, czyli zaledwie o 1 mniejszą od ich mianowników. W takiej sytuacji, to znaczy gdy rozwinięcie dziesiętne ułamka $1/k$ ma okres długości $k-1$, mówimy, że jest to rozwinięcie maksymalne. Nasuwa się pytanie, czy faktycznie okres nie może być dłuższy.

Nietrudno to uzasadnić. Liczby przy dzieleniu dziesiętnym zaczną się powtarzać, gdy drugi raz trafimy na tę samą resztę. A różnych (niezerowych) reszt może być dokładnie $k-1$.

Przykłady: przy dzieleniu 1 przez 7 kolejno pojawiają się reszty 1, 3, 2, 6, 4, 5 i znów 1, 3 itd.; przy dzieleniu przez 17 reszty to 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1 i znów 10, 15 itd.

Natomiast przy dzieleniu przez 13 pojawiają się tylko niektóre spośród możliwych reszt: 10, 9, 12, 3, 4, 1. Jeszcze gorzej jest przy 11 – tylko 10 i 1. A przy 3 mamy już tylko 1.

A czy zawsze jest tak, że liczba reszt pojawiających się przy dzieleniu przez k dzieli $k-1$?

Powstaje pytanie, odwrotności których liczb mają w systemie dziesiętnym maksymalne okresy. O dziwo, pełna odpowiedź na to pytanie nie jest znana – praktycznie jedyną ogólną metodą jest... wykonanie dzielenia.

Chętnym polecamy sprawdzenie, że maksymalne okresy mają odwrotności liczb 19, 23, 97, 337.

Z życia SEM

2 czerwca 2009 roku w Piotrkowie odbył się pod patronatem SEM i przy współpracy Wojewódzkiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli oraz I LO im. Bolesława Chrobrego

Dzień Dziecka z Matematyką.

O pierwszym plakacie SEM (patrz np. *Delta* 2/2009) mówił Waldemar Pompe, po czym odbyło się spotkanie nauczycieli poświęcone pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie. Spotkanie zakończyły zajęcia warsztatowe dla uczniów pod tytułem *Rozwiązywanie zadań konkursowych z geometrii.*

Informujcie nas, jakie spotkania odbywają się w Waszej miejscowości!