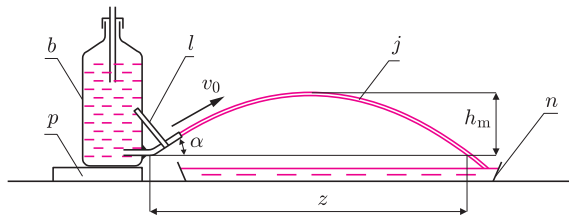


## Rzutów ciąg dalszy, czyli badamy rzut ukośny

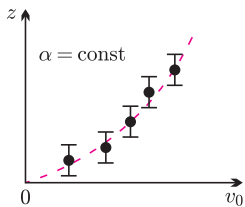
Stanisław BEDNAREK

Celem naszych dzisiejszych doświadczeń będzie badanie rzutu ukośnego. Układ doświadczalny do przeprowadzenia tych badań przedstawia rysunek 1. Wykorzystujemy w nim butelkę Mariotte'a, taką samą jak do badania rzutu poziomego. Butelkę tę ustawiamy na stole lub podłodze na jednej lub dwóch podkładkach. Od strony elastycznej rurki umieszczamy dużą kufkę fotograficzną lub brytfannę, tak żeby rurka znalazła się tuż nad jej brzegiem, można także wykonać to doświadczenie w wannie lub brodziku kabiny prysznicowej.



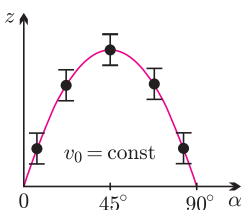
Rys. 1. Układ do badania rzutu ukośnego;  $b$  – butelka Mariotte'a,  $p$  – podkładka,  $l$  – taśma,  $n$  – kufka lub brytfanna,  $j$  – strumień wody,  $v_0$  – prędkość początkowa,  $\alpha$  – kąt rzutu,  $z$  – zasięg rzutu,  $h_m$  – maksymalna wysokość.

Dla uzyskania rzutu ukośnego rurka powinna być odchylona od poziomu ku górze o pewien kąt  $\alpha$ . Można tego dokonać za pomocą kawałka taśmy samoprzylepnej, którą obejmujemy rurkę od dołu i przyklejamy końce taśmy do butelki. Strumień wody wypływający z rurki będzie poruszał się wówczas po paraboli zwróconej ramionami ku dołowi. Dla ułatwienia pomiarów długość  $z$  przyjmujemy z dobrym przybliżeniem jako zasięg rzutu ukośnego (rys. 1). Największe wzniesienie strumienia wody  $h_m$  nad tym odcinkiem przyjmujemy jako maksymalną wysokość rzutu ukośnego. Obie te wielkości możemy zmierzyć przy użyciu dwóch linijek, przy czym wygodnie jest zapewnić sobie pomoc drugiej osoby.



Rys. 2. Zależność zasięgu rzutu ukośnego  $z$  od jego prędkości  $v_0$ ;  $\alpha$  – kąt rzutu.

Mając przygotowany układ pomiarowy, możemy zbadać kilka zależności, charakteryzujących rzut ukośny. W każdym przypadku wszystkie pomiary przeprowadzamy co najmniej 5–6 razy i na podstawie uśrednionych wyników tych pomiarów sporządzamy wykres. Najpierw zajmijmy się związkiem zasięgu  $z$  rzutu ukośnego oraz jego prędkości  $v_0$  (rys. 2). Kąt rzutu  $\alpha$  będzie pozostawał w tym przypadku niezmienny. Prędkość rzutu ukośnego,  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , obliczamy tak samo, jak w przypadku rzutu poziomego. Jaka krzywa stanowi wykres?



Rys. 3. Zależność między zasięgiem rzutu ukośnego  $z$  oraz kątem rzutu  $\alpha$ ;  $v_0$  – prędkość rzutu.

Następnie zajmijmy się zależnością zasięgu  $z$  od kąta rzutu  $\alpha$  (rys. 3). Teraz prędkość rzutu  $v_0$  będzie pozostawała niezmienna. Kąt rzutu  $\alpha$  zmieniamy przez podniesienie elastycznej rurki względem poziomu. Czynimy to, przyklejając wyżej końce taśmy samoprzylepnej do butelki. Oczywiście, do pomiarów kątów używamy kątomierza. Staramy się przeprowadzić pomiary dla całego zakresu kątów  $0$ – $90^\circ$ , zwracając przy tym uwagę, żeby dla większych kątów nie spowodować załamania elastycznej rurki. Jaką krzywą przedstawia teraz wykres? Dla jakiej wartości kąta rzutu zasięg jest maksymalny? Czy ten sam zasięg otrzymujemy tylko dla jednego kąta rzutu?

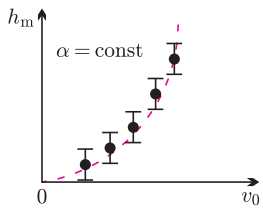
Zajmijmy się jeszcze maksymalną wysokością rzutu ukośnego  $h_m$ . Ustalamy pewien kąt rzutu  $\alpha$ . Pierwszą z linijek umieszczamy poziomo, tak jakbyśmy chcieli zmierzyć nią zasięg rzutu. Drugą linijkę ustawiamy pionowo i mierzymy największe wzniesienie strumienia wody nad pierwszą linijką, czyli maksymalną wysokość rzutu  $h_m$ . Zmieniamy prędkość rzutu i powtarzamy pomiary. Uzyskane wyniki wykorzystujemy do sporządzenia wykresu przedstawiającego zależność maksymalnej wysokości  $h_m$  od prędkości rzutu  $v_0$  (rys. 4).

Ostatnia seria pomiarów pozwoli nam uzyskać związek między maksymalną wysokością  $h_m$  a kątem rzutu  $\alpha$ . Dla ustalonej prędkości rzutu kąt ten zmieniamy kilkakrotnie, podobnie jak to robiliśmy w przypadku zasięgu. Otrzymane wyniki pomiarów również wykorzystujemy do sporządzenia wykresu (rys. 5). Popatrzmy na ostatnie dwa wykresy. Czym różnią się kształty krzywych, które one przedstawiają?

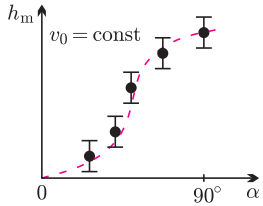
Przeprowadzimy teraz krótkie rozważania teoretyczne pozwalające na wspólne wyjaśnienie i ilościowe opisanie uzyskanych zależności dla rzutu ukośnego oraz badanego wcześniej rzutu poziomego. W tym celu rozpatrzmy rzut ukośny niewielkiego ciała  $A$ , umieszczonego na wysokości  $H$ , w układzie współrzędnych  $XOY$ , przyjętym jak na rysunku 6. Rzut ten możemy potraktować jako złożenie ruchu jednostajnego wzdłuż osi  $OX$  i jednostajnie zmiennego z przyspieszeniem ziemskim  $g$  wzdłuż osi  $OY$ . W chwili  $t$  od wyrzucenia ciała jego współrzędne  $x, y$  wyrażają się następującymi wzorami:

$$(1) \quad x = v_0 t \cos \alpha,$$

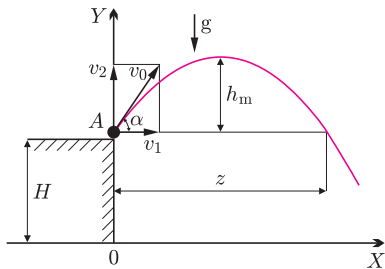
$$(2) \quad y = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$



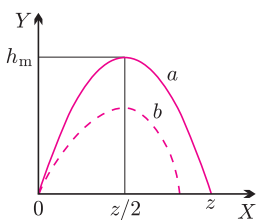
Rys. 4. Zależność maksymalnej wysokości rzutu ukośnego  $h_m$  od prędkości rzutu  $v_0$ ;  $\alpha$  – kąt rzutu.



Rys. 5. Zależność między maksymalną wysokością rzutu ukośnego  $h_m$  a kątem rzutu  $\alpha$ ;  $v_0$  – prędkość rzutu.



Rys. 6. Ogólny przypadek rzutu ukośnego ciała we współrzędnych prostokątnych  $XOY$ ;  $H$  – wysokość początkowa,  $v_1, v_2$  – składowe prędkości początkowej  $v_0$ ,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $z$  – zasięg,  $h_m$  – maksymalna wysokość,  $\alpha$  – kąt rzutu.



Rys. 7. Tor rzutu ukośnego w przypadku pominięcia oporu powietrza  $a$  (parabola) i w przypadku jego uwzględnienia  $b$  (krzywa balistyczna);  $z$  – zasięg rzutu,  $h_m$  – maksymalna wysokość.

Z równania (1) wyznaczamy  $t$  i podstawiamy do równania (2). Otrzymujemy wówczas równanie toru w postaci

$$(3) \quad y = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Jest to równanie kwadratowe względem  $x$ , a zatem tor rzutu ukośnego istotnie stanowi parabola. Przyjmując warunek  $\alpha = 0$ , dostajemy rzut poziomy z prędkością  $v_0$ , ciała umieszczonego na wysokości  $H$ . Równanie toru tego rzutu ma postać

$$(4) \quad y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Nakładając na równanie (4) warunki  $y = 0$  i  $x = z$ , dostajemy wzór na zasięg rzutu poziomego:

$$(5) \quad z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ze wzoru (5) wynika, że zasięg  $z$  w tym rzucie jest wprost proporcjonalny do prędkości rzutu oraz do pierwiastka kwadratowego z wysokości. Dlatego badając rzut poziomy, otrzymaliśmy linię prostą i parabolę, będącą wykresem funkcji pierwiastkowej – porównaj rysunki 3 i 4 przy eksperymentach dotyczących rzutu poziomego.

Teraz nałożymy warunki  $H = 0$ ,  $x = z$  i  $y = 0$  na równanie (3). Warunki te odpowiadają upadkowi ciała rzuconego ukośnie pod kątem  $\alpha$ . Otrzymane wówczas równanie po prostym przekształceniu daje wzór na zasięg rzutu ukośnego w postaci

$$(6) \quad z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Ze wzoru (6) wyciągamy wniosek, że zasięg rzutu ukośnego jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości rzutu i sinusa podwójonego kąta, pod którym ciało wyrzucono. Teraz rozumiemy, dlaczego dla zależności zasięgu rzutu ukośnego od prędkości dostaliśmy parabolę (por. rys. 2), a dla zależności tego zasięgu od kąta wykres podwójonej funkcji sinus (por. rys. 3).

Pozostaje nam jeszcze wyprowadzenie wzorów na maksymalną wysokość rzutu ukośnego. Najłatwiej można to zrobić, korzystając ze znanego wzoru na współrzędną pionową  $y_w$  wierzchołka paraboli. Wzór ten znany z tablic matematycznych i podręczników ma postać

$$(7) \quad y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

gdzie  $a, b, c$  są współczynnikami ogólnego równania paraboli

$$(8) \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Wobec  $H = 0$  i (3) mamy  $c = 0$ , co znacznie upraszcza obliczenia. Po porównaniu wspomnianych wzorów i podstawieniu współczynników  $a, b$  do wzoru (7) otrzymujemy

$$(9) \quad h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Patrząc na wzór (9), widzimy, że maksymalna wysokość w rzucie ukośnym jest wprost proporcjonalna do kwadratów prędkości początkowej i sinusa kąta rzutu. Uzasadnia to otrzymanie paraboli dla zależności maksymalnej wysokości rzutu od jego prędkości (por. rys. 4) i wykresu funkcji sinus podniesionej do kwadratu dla zależności tej wysokości od kąta rzutu (por. rys. 5).

Dla uzupełnienia naszych rozważań należy jeszcze zwrócić uwagę na jeden istotny fakt polegający na pominięciu oporu powietrza. Kiedy prędkości rzutu są niewielkie – tak jak w naszych doświadczeniach – uproszczenie to jest uzasadnione. Tor rzutu ma wtedy kształt paraboli o opadających ramionach (rys. 7). Przy dużych prędkościach początkowych, wynoszących setki m/s, np. przy wystrzale z karabinu lub działa, oporu powietrza nie można pominąć. Istnienie oporu powietrza powoduje zmniejszenie zasięgu i maksymalnej wysokości. Rzeczywisty tor rzutu ulega skróceniu i obniżeniu w porównaniu z wynikiem uzyskanym przy zaniedbaniu oporów powietrza, zmieniając się z paraboli w tzw. krzywą balistyczną.

Na zakończenie problem do samodzielnego przemyślenia i sprawdzenia doświadczalnego. Jaką maksymalną wysokość rzutu można uzyskać w układzie przedstawionym na rysunku 1, przy pominięciu wszelkich oporów ruchu? Pod jakim kątem należy wykonać ten rzut? Ile będzie wynosił jego zasięg?