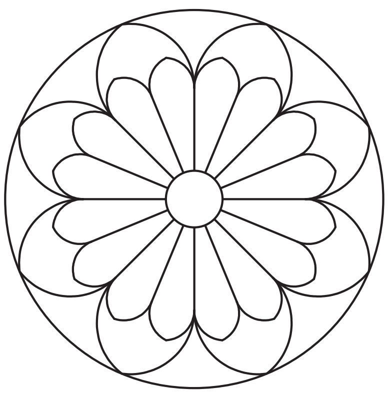
Rozeta katedry w Metz – ciąg dalszy



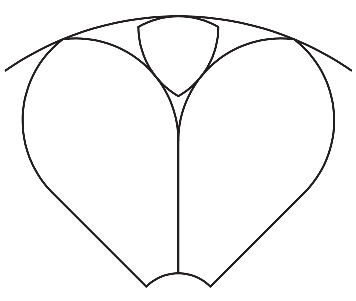
Rys. 1

Przypominamy: trójkąt Reuleaux to figura uzyskana z trójkąta równobocznego XYZ w ten sposób, że bok XY zostaje zastąpiony łukiem XY okręgu o środku Z i podobnie pozostałe boki; punkty X, Y, Z nazywamy wierzchołkami otrzymanego trójkąta Reuleaux.

W poprzednim artykule (*Delta* 8/2009) skonstruowaliśmy główną część rozety z katedry w Metz: osiem dużych ostrołuków wpisanych w okrąg oraz po dwa mniejsze ostrołuki wpisane w duże ostrołuki (rys. 1). Teraz zajmiemy się wolną przestrzenią między dużymi ostrołukami i okręgiem ograniczającym rozetę. W każdą z tych wolnych przestrzeni wpiszemy trójkąt Reuleaux styczny do obu ostrołuków i danego okręgu (rys. 2). Zaznaczmy wierzchołki trójkąta Reuleaux; niech będą to punkty B, C i D. Zaznaczmy także punkty styczności: niech A będzie punktem styczności okręgu ograniczającego rozetę z łukiem CD, niech E będzie punktem styczności dużych ostrołuków i niech S będzie punktem styczności łuków WE i BD. Niech wreszcie punkt P będzie środkiem okręgu, którego fragmentem jest łuk WE (rys. 3). Oczywiście odcinek PE jest promieniem tego okręgu.

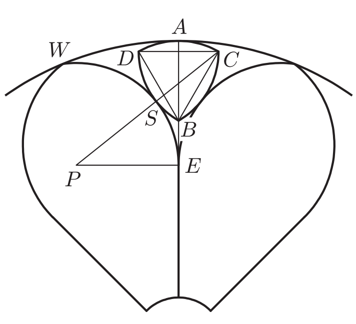
Naszym celem jest znalezienie wierzchołków B, C i D. Muszą przy tym być spełnione następujące warunki:

$$AB = BC = CD = BD \quad \text{oraz} \quad PC = PE + AB.$$



Rys. 2

Rozwiążemy najpierw zadanie w pewnym sensie odwrotne. Założymy, że dane są punkty B, C i D, a następnie znajdziemy odpowiadający im punkt P spełniający żądane warunki. Wtedy otrzymaną konfigurację punktów przekształcimy przez jednokładność o środku w punkcie A, tak by otrzymany punkt P pokrył się z danym punktem P. Konstrukcję tę opiszemy jednak nie odwołując się bezpośrednio do pojęcia jednokładności, tak by była ona zrozumiała również dla osób nieznających własności tego przekształcenia geometrycznego. Czytelnik znający te własności bez trudu dostrzeże sposób wykorzystania jednokładności.

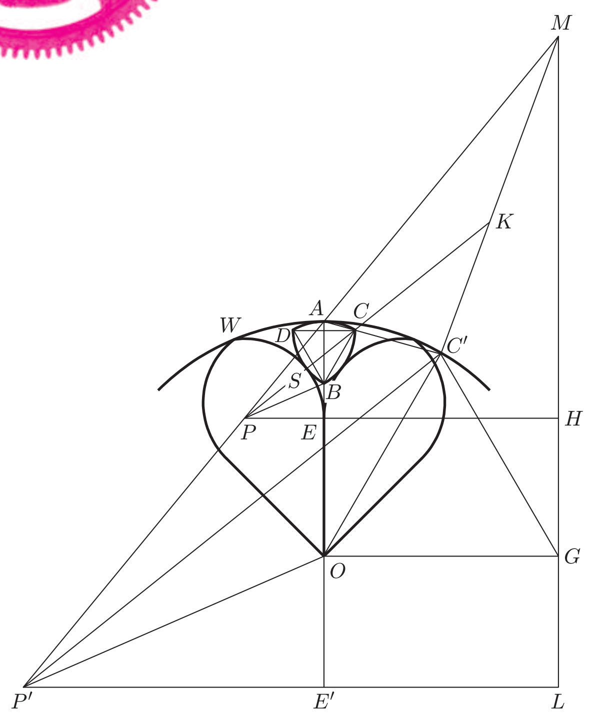


Rys. 3

Niech O będzie środkiem okręgu ograniczającego rozetę. Konstrukcję rozpoczynamy od tego, że na prostej OA wybieramy dowolny punkt B' i konstruujemy trójkąt równoboczny $B'C'D'$, którego bok jest równy AB'. Na rysunku 4 wybraliśmy $B' = O$; punkt C' znajduje się wtedy na okręgu ograniczającym rozetę oraz $\sphericalangle AOC' = 30°$. Nie zaznaczamy na tym rysunku punktu D'; nie jest on potrzebny do konstrukcji punktów B, C i D. Ponieważ trójkąt AOC' jest równoramienny, więc $\sphericalangle OAC' = \sphericalangle OC'A = 75°$. Znajdujemy następnie punkt G, tak by trójkąt OGC' był równoboczny. Zauważmy, że wtedy

$$\sphericalangle AOG = \sphericalangle AOC' + \sphericalangle C'OG = 30° + 60° = 90°.$$

Przez punkt G prowadzimy następnie prostą prostopadłą do OG (czyli równoległą do OA). Zaznaczamy punkt przecięcia tej prostej z prostą AP; niech będzie to punkt M. Niech H będzie punktem przecięcia prostych GM i PE. Teraz zaczyna się najważniejsza część konstrukcji: na prostej MC' znajdujemy taki punkt K, by $PK = PH$. Następnie przez punkt C' prowadzimy prostą równoległą do PK i w przecięciu z prostą AP znajdujemy punkt P'. Niech E' będzie rzutem punktu P' na prostą OA i niech L będzie punktem przecięcia prostych GM i $P'E'$. Wykażemy, że $P'C' = P'E' + OA$.



Rys. 4

Zauważamy dwie pary trójkątów podobnych:

$$\triangle PKM \sim \triangle P'C'M \quad \text{oraz} \quad \triangle PHM \sim \triangle P'LM.$$

Mamy zatem

$$\frac{PK}{P'C'} = \frac{PM}{P'M} = \frac{PH}{P'L}.$$

Ponieważ $PK = PH$, więc

$$P'C' = P'L = P'E' + E'L = P'E' + OG = \\ = P'E' + OA.$$

Teraz znajdujemy punkty B, C i D. Niech C będzie punktem przecięcia prostych AC' i PK. Następnie przez punkt C prowadzimy prostą równoległą do OC'; punkt B jest punktem przecięcia tej prostej z prostą OA. Wreszcie punkt D jest punktem symetrycznym do C względem prostej OA. Zauważmy najpierw, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC' = 30°$. Stąd wynika, że $\sphericalangle DBC = 60°$. Ponieważ z symetrii wynika też, że $DB = BC$, więc trójkąt BCD jest równoboczny. Wiemy również, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle OAC' = 75°$, a więc $\sphericalangle BCA = 75°$. Stąd wynika, że trójkąt BCA jest równoramienny: $BC = BA$.

Pozostaje do wykazania, że $PC = PE + AB$. Korzystając z podobieństwa trójkątów PCA i $P'C'A$, otrzymujemy proporcję

$$\frac{PC}{P'C'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Z podobieństwa trójkątów PEA i $P'E'A$ otrzymujemy

$$\frac{PE}{P'E'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Z podobieństwa trójkątów BCA i $OC'A$ i jeszcze raz PCA i $P'C'A$ otrzymujemy

$$\frac{BC}{OC'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{PA}{P'A}.$$

Stąd dostajemy $PE \cdot P'A = P'E' \cdot PA$ oraz $BC \cdot P'A = OC' \cdot PA$. Po dodaniu ostatnich dwóch równości dostajemy

$$(PE + BC) \cdot P'A = (P'E' + OC') \cdot PA,$$

czyli

$$\frac{PE + BC}{P'E' + OC'} = \frac{PA}{P'A} = \frac{PC}{P'C'}.$$

Ale $P'E' + OC' = P'E' + OA = P'C'$, skąd wynika, że $PE + BC = PC$. Ponieważ $BC = AB$, więc ostatecznie dostajemy $PE + AB = PC$. To dowodzi poprawności konstrukcji wierzchołków trójkąta Reuleaux.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI