delta
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Następne materiały olimpijskie będą opublikowane w *Delcie* 11/2009

Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiady Astronomicznej, Olimpiady Matematycznej oraz Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów 2009/2010

W dniu oddawania do druku tego numeru *Delty* Konkursy na organizację olimpiad przedmiotowych w roku szkolnym 2009/2010 nie były jeszcze rozstrzygnięte. Z tego względu nie mieliśmy możliwości opublikowania zadań ze wszystkich poszczególnych pierwszych etapów. Nie podajemy też adresów Komitetów Okręgowych. Publikujemy zadania z obu Olimpiad Matematycznych, gdyż wszyscy zainteresowani uzgodnili, że zadania, które zamieszczamy, będą obowiązujące bez względu na to, kto będzie organizatorem. Z kolei dotychczasowy Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej zapewnia, że wszyscy, którzy nadeślą rozwiązania zamieszczonych niżej zadań, otrzymają odpowiedź.

Redakcja

LIII Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 12 października 2009 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej olimpiady: `http://planetarium.chorzow.net.pl`

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 16 listopada 2009 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć na osobnej kartce następujące informacje: imię i nazwisko, rok urodzenia, nazwa szkoły wraz z jej imieniem, adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa), klasa, profil klasy, adres prywatny (z kodem pocztowym), e-mail, nazwisko nauczyciela fizyki i astronomii oraz ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.

10. Zawody II stopnia odbędą się 18 stycznia 2010 r. Zawody III stopnia odbędą się w dniach od 11 do 14 marca 2010 r.

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. W marcu 2009 r. na orbicie heliocentrycznej umieszczono sondę *Kepler*. Sonda obiega Słońce w czasie 372,5 dnia, po orbicie położonej w płaszczyźnie orbity ziemskiej. Zakładając, że w momencie początkowym kąt pomiędzy kierunkami: Ziemia–sonda i Ziemia–Słońce wynosił 180°, oblicz ten kąt oraz odległość sondy od Ziemi:
a. po planowanym zakończeniu misji, tzn. po 3,5 roku;
b. po ewentualnym przedłużeniu misji sondy do 6 lat.

Uwagi:
1° pomijamy perturbacje pochodzące od Ziemi, Księżyca i planet,
2° ze względu na małe mimośrody orbit Ziemi i sondy przyjmujemy, że są one okręgami.

2. Szerokość geograficzna obserwatorium astronomicznego krakowskiego Uniwersytetu Pedagogicznego na Suhorze wynosi $\varphi_{\mathrm{S}} = +49{,}5^{\underline{\mathrm{o}}}$, natomiast obserwatorium astronomicznego Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Piwnicach $\varphi_{\mathrm{P}} = +53{,}1^{\underline{\mathrm{o}}}$. Przyjmując, że nocne obserwacje astronomiczne można prowadzić w okresie, gdy wysokość Słońca $h < -15°$, oblicz różnicę pomiędzy takimi okresami podczas zimowego i letniego przesilenia w tych obserwatoriach.

3. Zadaniem sondy *Kepler* jest poszukiwanie planet pozasłonecznych podobnych do Ziemi. Umieszczony na sondzie teleskop prowadzi równoczesne obserwacje fotometryczne dużej liczby gwiazd w celu wykrycia okresowych zmian ich jasności, wynikających z przejścia na tle tarczy danej gwiazdy hipotetycznej planety. Oblicz, o ile procent zmieniłby się strumień dochodzącego światła od gwiazdy takiej jak nasze Słońce, gdyby na jej tle przechodziła planeta wielkości Ziemi. Obliczoną zmianę strumienia wyraź w wielkościach gwiazdowych.

4. Krótko opisz cele Międzynarodowego Roku Astronomii 2009 i wymień kilka znanych Ci imprez organizowanych w ramach obchodów tego roku. Zaproponuj program takich obchodów w Twojej szkole, uwzględniając realne możliwości szkoły i uczniów w organizowaniu i przeprowadzeniu elementów takiego programu.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów.
W przypadku zastosowania metody fotograficznej można dołączyć negatyw, fotografię, wydruk komputerowy zdjęcia lub plik na CD, DVD itp.

1. Skontroluj prawidłowość wskazań zegara słonecznego znajdującego się w Twojej lub pobliskiej miejscowości. W tym celu dokonaj odczytu wskazań zegara słonecznego w różnych momentach czasu urzędowego i porównaj te wskazania z obliczonym lokalnym czasem prawdziwym słonecznym dla tych momentów. Skomentuj otrzymane wyniki. Swoje obserwacje udokumentuj fotograficznie.

2. Sfotografuj (co najmniej dwukrotnie) planetoidę (3) Juno, która od początku września do połowy października będzie widoczna przez całą noc, osiągając w opozycji 18 września 2009 roku jasność $7{,}7^{\mathrm{m}}$. Wcześniej wyznacz realny zasięg (w wielkościach gwiazdowych) przyrządu, który posłuży Ci do wykonania zdjęć. Na każdym ze zdjęć zaznacz strzałkami zidentyfikowane jaśniejsze gwiazdy oraz planetoidę. Poniższa tabelka zawiera trzy przewidywane w tym czasie pozycje planetoidy.

Data	α_{2000}	δ_{2000}
8 września 2009	$0^{\mathrm{h}}08^{\mathrm{m}}$	$-1°05'$
18 września 2009	$0^{\mathrm{h}}02^{\mathrm{m}}$	$-3°11'$
18 października 2009	$23^{\mathrm{h}}44^{\mathrm{m}}$	$-9°03'$

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 16 listopada 2009 r.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych.*
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami.*
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką.*
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów.*
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika.*
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie.*

LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiazania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **listem poleconym** pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2009 r. – I seria,
31 października 2009 r. – II seria,
30 listopada 2009 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie bedą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010}-1)(y^{2009}-1)=(x^{2009}-1)(y^{2010}-1).$$

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D, który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD. Wykazać, że punkty B,C,D,S leżą na jednym okręgu.

3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1,2,3,2,3,4)$ i $(1,4)$, jak również (1) i $(1,1,1,1,1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2,2,2,2,2)$ i $(2,2)$, ani $(1,4)$ i $(1,2,3,3,2,4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.

4. Liczba 2 należy do zbioru A, który spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x\in A$, jeżeli $x\neq 0$ i $x\neq 1$, to

$$\frac{x+1}{x}\in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1}\in A.$$

Udowodnić, że A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

II seria

5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB, to $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB$.

6. Dana jest liczba pierwsza $p\neq 5$ oraz takie liczby całkowite a,b,c, że p jest dzielnikiem obu liczb $a+b+c$ i $a^5+b^5+c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ jest podzielna przez p.

7. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB>90^\circ$, wpisany jest w okrąg o środku S. Prosta CS przecina odcinek AB w punkcie D. Udowodnić, że jeżeli

$$AC+BC=2CS,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c i liczby całkowitej $n\geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b}\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

III seria

9. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f,g\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n\in\mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n))=g(n)-n.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$, spełniające warunki

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$$

oraz

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n.$$

11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości

$$AB=PQ,\quad BC=QR,\quad CD=RS,\quad DA=SP.$$

Dowieść, że istnieją punkty P',Q',R',S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, takie że

$$AP'=BQ'=CR'=DS'$$

oraz czworokąt $P'Q'R'S'$ jest przystający do czworokąta $PQRS$.

12. Gracze K i F grają w c-*fasolki*, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n\geqslant 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K, przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn. K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F. Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n\geqslant 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c-fasolki.

V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach!

Zgodnie z decyzją Ministra Edukacji Narodowej laureaci OMG są zwolnieni z egzaminu gimnazjalnego z części matematyczno-przyrodniczej i przyjmowani do wybranego liceum w pierwszej kolejności.

Wielu finalistów OMG zostało później laureatami Olimpiady Matematycznej (dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych).

Terminarz:

Zawody stopnia pierwszego	**1 września 2009 r. – 26 października 2009 r.**
Zawody stopnia drugiego	**9 stycznia 2010 r.**
Zawody stopnia trzeciego	**20–21 marca 2010 r.**

Jak wystartować w OMG?

Wystarczy rozwiązać co najmniej jedno z poniższych zadań i swoje rozwiązania przesłać do właściwego Komitetu Okręgowego OMG, **najpóźniej dnia 26 października 2009 r.** (decyduje data stempla pocztowego).

Aby zakwalifikować się do kolejnego etapu Olimpiady, nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Progi kwalifikacyjne są każdego roku inne i zależą od liczby uczestników, jakości rozwiązań i trudności zadań.

Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, zadania z poprzednich edycji OMG oraz inne informacje można znaleźć na stronie internetowej OMG: `www.omg.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c, dla których $a^2 = b^2 + c$.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wyznacz wszystkie punkty P leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równość

$$[PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d = 101, \\ ab+cd = 200. \end{cases}$$

Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

4. Dany jest 18-kąt foremny $A_1A_2 \dots A_{18}$. Wykaż, że czworokąt ograniczony prostymi A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} i $A_{10}A_{17}$ jest prostokątem. Czy ten prostokąt jest kwadratem?

5. Przy każdym wierzchołku 55-kąta foremnego napisano liczbę całkowitą. Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 5. Wykaż, że istnieją takie dwie liczby a i b, napisane przy sąsiednich wierzchołkach tego wielokąta, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

6. Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dana jest taka liczba rzeczywista a, że liczby $a^2 + a$ oraz $a^3 + a$ są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.