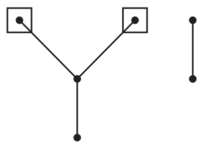
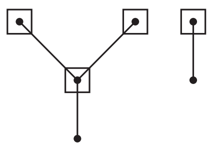
Zgodnie z tą strategią, mając n kandydatek, należy po kolei:

- rzucić n razy monetą i odrzucić tyle początkowych kandydatek, ile wypadło orłów;
- rzucić raz monetą i jeśli wypadł orzeł, to zaznaczyć te wierzchołki, które mają największą wysokość, a jeśli wypadła reszka, to zaznaczyć wierzchołki, które mają największą lub o 1 mniejszą wysokość;
- wybrać pierwszą spośród następnych kandydatek, która będzie lepsza od jakiejś zaznaczonej i będzie najlepsza wśród dotychczasowych.



Graf po sprawdzeniu 6 kandydatek, gdy wypadł orzeł.



Graf po sprawdzeniu 6 kandydatek, gdy wypadła reszka.

Ta strategia daje nam prawdopodobieństwo 25%, że niezależnie od tego, jaki graf tworzą kandydatki na żonę i w jakiej kolejności przychodzą, wybierzemy właśnie tę najlepszą. Niesamowicie optymistyczny wynik – nawet jeśli bierzemy pod uwagę 3 miliardy kandydatek, to dzięki opisanej metodzie na 25% znajdziemy wśród nich najlepszą żonę!

No, ale to nie koniec. Nikt nie twierdzi, że lepiej się nie da. Wiemy, że wskazana wyżej strategia nie da lepszego prawdopodobieństwa, ale przecież może być inna, lepsza metoda. W opisanej strategii odrzucaliśmy średnio połowę kandydatek, a następnie losowaliśmy, które wierzchołki zaznaczamy – może lepiej będzie, jeśli po 1/3 kandydatek zaznaczymy wierzchołki o największej wysokości, a po 2/3 także te o wysokości o jeden mniejszej? A może trzeba szukać całkiem innej metody? Mam powody przypuszczać, że istnieje strategia dająca, jak w przypadku poszukiwań sekretarki, szansę równą $1/e$, czyli około 37%. Czekam tylko na kogoś, kto znajdzie tę strategię i udowodni. Zachęcam do poszukiwań – zarówno teoretycznych, jak i praktycznych!

Logarytm w liczbach naturalnych

*Jan SZEJKO**

Zajmiemy się problemem znalezienia funkcji ze zbioru liczb całkowitych dodatnich w zbiór liczb naturalnych, możliwie wiernie oddającej podstawowe własności logarytmu. Następujące zadanie jest pierwszą próbą określenia własności, które szukana funkcja ma spełniać.

Przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$.

Problem 1. *Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$, która nie jest stale równa* 0 *i spełnia warunki:*

1) *f jest niemalejąca,*
2) *dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(kl) = f(k) + f(l)$?*

Nie jest to trudny problem; pokażemy, że, niestety, nie ma takiej funkcji.

Dowód. Dla każdego $n > 1$ zachodzi $f(n) > 0$, gdyby bowiem dla pewnego $n > 1$ było $f(n) = 0$, to również $f(n^k) = kf(n) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$. A stąd byłoby $f(n) \equiv 0$ ze względu na monotoniczność f, czyli sprzeczność.

Pokażemy, że $a^{f(b)} \geqslant b^{f(a)}$ dla $a, b > 1$. Dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, korzystając kolejno z warunków 2) i 1), otrzymujemy:

$$\frac{p}{q} > \frac{f(b)}{f(a)} \Leftrightarrow pf(a) > qf(b) \Leftrightarrow f(a^p) > f(b^q) \Rightarrow a^p > b^q.$$

Aby skorzystać z ciągłości potęgowania, trzeba zauważyć, że dla ustalonych a i b relacja między a^p i b^q zależy tylko od wartości ułamka $\frac{p}{q}$ (bo $a^p > b^q \Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} > b$), a następnie wziąć malejący ciąg liczb wymiernych zbiegający do $\frac{f(b)}{f(a)}$.

Potęgowanie jest ciągłe, więc musi być również $a^p \geqslant b^q$ dla $\frac{p}{q} = \frac{f(b)}{f(a)}$, stąd $a^{f(b)} \geqslant b^{f(a)}$, czego należało dowieść. Zauważmy ciekawą rzecz: nigdzie nie założyliśmy nic więcej o a i b oprócz tego, że $a, b > 1$. Zatem analogiczna nierówność zachodzi, gdy zamienimy a i b miejscami: $b^{f(a)} \geqslant a^{f(b)}$. Mamy więc równość $a^{f(b)} = b^{f(a)}$ dla $a, b > 1$. To jednak nie może być prawda, ponieważ dla $a = 2$, $b = 3$ dostajemy równość liczby parzystej i nieparzystej. $\square$

Wiemy już, że nie ma funkcji, która spełnia warunki 1) i 2). Możemy jednak się zastanowić, co będzie, jeśli któryś z nich osłabimy. Zastąpmy warunek 2) słabszym warunkiem 2′).

Problem 2. *Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$, która nie jest stale równa* 0 *i spełnia warunki:*

1) *f jest niemalejąca,*

2′) *dla $k, l \in \mathbb{Z}_+$ względnie pierwszych zachodzi $f(kl) = f(k) + f(l)$?*

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Tu już nie możemy skorzystać z poprzedniej metody, ponieważ nie mamy podstaw do stwierdzenia, że $f(a^n) = nf(a)$. Można zauważyć, że gdyby taka tożsamość zachodziła, to w istocie spełniony byłby warunek 2).

Okazuje się, że po tym osłabieniu nadal nie istnieje odpowiednia funkcja – w rzeczywistości z tych słabszych warunków można wyprowadzić warunek 2), co pokazuje, że oba problemy są równoważne. Aby to udowodnić, najpierw wykażmy

Lemat 1. *Jeśli $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ spełnia warunki 1) i 2′), to dla każdego $a \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że*

$$f(an) = f(a(n+1)).$$

Lemat ten mówi w szczególności, że f musi mieć dowolnie długie przedziały, na których jest stała – jeśli bowiem $f(an) = f(a(n+1))$, to z monotoniczności f (warunek 1)) na całym przedziale $[an, a(n+1)]$, długości $a+1$, f musi być stała.

Oczywiście, nie wynika z tego jeszcze, że f jest od pewnego miejsca stała – np. funkcja „część całkowita $\sqrt{n}$" ma dowolnie długie przedziały, na których jest stała, ale nie jest stała na $[N, \infty)$ dla żadnego $N \in \mathbb{N}$.

Zajmijmy się dowodem lematu.

Dowód. Gdyby dla danego a nie było takiej liczby n, to wiedzielibyśmy, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(ak) + 1 \leqslant f(a(k+1))$, a więc również $f(a(k+l)) \geqslant f(ak) + l$ dla dowolnego $l \in \mathbb{Z}_+$, czyli f rośnie przynajmniej liniowo. Intuicyjnie stwierdzamy, że funkcja zachowująca się podobnie do logarytmu powinna rosnąć mniej więcej tak, jak logarytm.

Formalnie można to uzasadnić następująco: niech p będzie liczbą pierwszą, która nie dzieli a, natomiast r jakąś liczbą niepodzielną przez p. Wtedy

$$f(p) + f(ar) = f(par) = f(a(r + (p-1)r)) \geqslant f(ar) + (p-1)r,$$

czyli $f(p) \geqslant (p-1)r$. Jednak r można wybrać dowolnie duże, co prowadzi do sprzeczności. Zatem musi istnieć takie n, że $f(an) = f(a(n+1))$. □

Udowodnimy teraz, że nie istnieje funkcja, o której mówi problem 2.

Dowód. Niech a będzie dowolną liczbą całkowitą większą od 1. Pokażemy przez indukcję, że $f(a^n) = nf(a)$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Podstawa indukcji jest trywialna: $f(a) = f(a)$.

Wystarczy dobrać takie k, że $f(a^2k) = f(a^2(k+1))$. Z lematu 1 wynika, że taka liczba istnieje.

Korzystając z lematu 1, ustalmy liczbę $k \in \mathbb{Z}_+$ (zależną tylko od a), taką, że

$$f(a(ak+1) - 1) = f(a(ak+1) + 1).$$

Co więcej, $f(a(ak+1)) = f(a) + f(ak+1)$ z warunku 2′) i tę samą wartość f przyjmuje również dla $a(ak+1) \pm 1$. Chcemy wykazać tezę indukcyjną $f(a^{m+1}) = (m+1)f(a)$ przy założeniu, że $f(a^m) = mf(a)$. Mamy

$$f(a^{m+1}) + f(ak+1) = f(a^{m+1}(ak+1)) = f(a^m(a^2k + a)).$$

Z 2′) oraz założenia indukcyjnego dostajemy

$$f(a^m(a^2k + a \pm 1)) = f(a^m) + f(a^2k + a \pm 1) = f(a^m) + f(a^2k + a) = \\ = mf(a) + f(a) + f(ak+1),$$

więc z monotoniczności również

$$f(a^m(a^2k + a)) = (m+1)f(a) + f(ak+1).$$

Podsumowując, dostajemy

$$f(a^{m+1}) + f(ak+1) = f(a^m(a^2k + a)) = (m+1)f(a) + f(ak+1),$$

czyli po prostu tezę indukcyjną. To kończy dowód indukcyjny, że $f(a^n) = nf(a)$ dla $a, n \in \mathbb{Z}_+$. Stąd już warunek 2) jest prostą konsekwencją, a więc problem sprowadza się do poprzedniego. □

Oczywiście, można dalej próbować osłabiać warunki. Nie wydaje się, by miało sens dalsze osłabianie 2), ale można zastąpić warunek 1) warunkiem mówiącym, że dla $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(n+1) \geqslant f(n) - 1$, czyli niemalejący jest ciąg $a_n = f(n) + n$. Można też pójść w inną stronę i zastanowić się, co wyjdzie dla liczb wymiernych, czyli szukać funkcji $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}$ spełniającej którąś wersję warunków. Możliwości poszukiwań jest wiele, być może nawet uda się tak dobrać warunki, by odpowiednia funkcja istniała i nie była trywialna. Zachęcam Czytelników do samodzielnego zajęcia się tym tematem.