Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 573 ($WT = 1{,}62$) i 574 ($WT = 2{,}64$) z numeru 1/2009

Marcin Kasperski	Warszawa	45,50
Krzysztof Dorobisz	Kraków	43,27
Andrzej Idzik	Bolesławiec	43,15
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Paweł Najman	Jaworzno	35,68

Do grona Weteranów dołączył Marcin Kasperski.

Zadania z matematyki nr 585, 586

Redaguje Marcin E. KUCZMA

585. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu przecięcia jego przekątnych na proste BC i DA. Punkty M i N są środkami boków AB i CD. Wykazać, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN.

586. Dowieść, że każdy dziewięcioelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B, że suma liczb w zbiorze A jest równa sumie liczb w zbiorze B.

Zadanie 586 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

Przypominamy treść zadań:

581. Dany jest n-elementowy zbiór X ($n \geqslant 4$) oraz $2^{n-2}+1$ jego różnych podzbiorów. Wykazać, że wśród tych podzbiorów istnieją takie cztery, których część wspólna jest zbiorem pustym lub jednoelementowym.

582. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par funkcji $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, mających pochodne wszystkich rzędów i spełniających warunki: $f'(0) = g'(0) = 1$ oraz

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

581. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną danych $2^{n-2}+1$ podzbiorów zbioru X. Jeżeli pewne dwa zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ są rozłączne, teza jest oczywista. Dalej odrzucamy ten banalny przypadek z rozważań.

Podzbiór U zbioru X nazwiemy *ciekawym*, gdy ma niepuste przecięcie z każdym zbiorem $A \cap B$ ($A, B \in \mathcal{F}$); w szczególności cały zbiór X jest ciekawy.

Przypuśćmy, że X jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów ciekawych U i V, liczących odpowiednio u i v elementów. Wszystkie podzbiory zbioru U grupujemy w pary zbiorów dopełniających się do całego zbioru U. Z każdej takiej pary co najwyżej jeden jest częścią wspólną zbioru U i pewnego zbioru $A \in \mathcal{F}$ (bo gdyby dla pewnych $A, B \in \mathcal{F}$ zbiory $A \cap U$ oraz $B \cap U$ dopełniały się do U, to zbiór $A \cap B \cap U$ byłby pusty, wbrew temu, że U jest zbiorem ciekawym). Zatem co najwyżej 2^{u-1} podzbiorów zbioru U ma postać $A \cap U$ dla $A \in \mathcal{F}$.

Analogicznie, co najwyżej 2^{v-1} podzbiorów zbioru V ma postać $A \cap V$ dla $A \in \mathcal{F}$. To jednak implikuje, że liczność rodziny $\mathcal{F}$ nie przekracza $2^{u-1} \cdot 2^{v-1} = 2^{n-2}$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że zbioru X nie da się rozbić na dwa zbiory ciekawe.

Niech U_0 będzie zbiorem ciekawym o minimalnej liczbie elementów i niech u_0 będzie dowolnym jego elementem; zbiór $U_0 \setminus \{u_0\}$ nie jest już ciekawy. Także zbiór $V_0 = X \setminus U_0$ nie jest ciekawy, w myśl konkluzji poprzedniego akapitu. Istnieją zatem takie zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ oraz takie zbiory $C, D \in \mathcal{F}$, że $A \cap B$ nie przecina zbioru $U_0 \setminus \{u_0\}$, zaś $C \cap D$ nie przecina V_0. Tak więc u_0 jest jedynym elementem, który może należeć do $A \cap B \cap C \cap D$. Zbiory A, B, C, D tworzą czwórkę, o jaką chodziło.

582. Wymagane warunki spełnia na przykład każda para funkcji postaci

$$f(x) = a\mathrm{e}^{x/a}, \quad g(x) = b\mathrm{e}^{x/b}, \qquad \text{gdzie} \quad a, b > 0, \quad a + b = 1.$$

Oznaczając $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, mamy bowiem

$$h(x) = f(x)g(x) = ab\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x}.$$

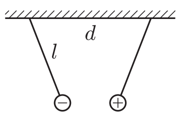
Po n-krotnym zróżniczkowaniu:

$$f^{(n)}(x) = a\alpha^n\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad g^{(n)}(x) = b\beta^n\mathrm{e}^{\beta x},$$
$$h^{(n)}(x) = ab(\alpha+\beta)^n\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x}.$$

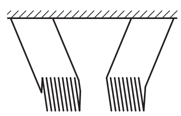
A ponieważ $\alpha + \beta = \alpha\beta$, dostajemy żądaną równość $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g^{(n)}(x)$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2009



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
472 ($WT = 1{,}90$) i 473 ($WT = 3{,}40$)
z numeru 2/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	37,66
Andrzej Idzik	Bolesławiec	33,04
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,37
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	28,18
Michał Koźlik	Gliwice	17,52

Zadania z fizyki nr 482, 483

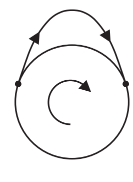
Redaguje Jerzy B. BROJAN

482. Dwa małe ciała o jednakowych masach zawieszono na nitkach o długości l zaczepionych w odległości d od siebie (rys. 1). Ciała są naładowane przeciwnymi znakami. Jaki warunek muszą spełniać l i d, aby przy pewnych wartościach mas i ładunków mogły istnieć dwa różne położenia równowagi ciał? Jaki musi być ten warunek, aby mogły istnieć trzy różne położenia równowagi? Czy są to położenia równowagi trwałej, czy nietrwałej? Nie bierzemy pod uwagę sytuacji, w której ciała się stykają.

483. Dwie zwojnice zawieszono na przewodach. Po włączeniu zasilania prądem przemiennym przyciągnęły się (rys. 2). Gdy między nie wstawiono pionową płytę z pewnego materiału, zaczęły się odpychać. Na czym polega efekt? Jaki to był materiał?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

Przypominamy treść zadań:



Rys. 3

478. Koło o promieniu $r = 30$ cm obraca się ze stałą prędkością kątową w płaszczyźnie pionowej. W pewnym momencie od koła oderwało się małe ciało (np. kropla wody), a po pewnym czasie spadło na to samo miejsce koła, przyklejając się bez straty energii (tzn. prędkość ciała i brzegu koła w miejscu upadku były jednakowe – zob. rys. 3). Podać co najmniej dwie wartości prędkości kątowej ω, przy których takie zdarzenie jest możliwe. Opór powietrza pominąć.

479. Mamy do dyspozycji kondensator o pojemności C naładowany do napięcia U oraz 2 nienaładowane kondensatory, których pojemności C_1 i C_2 możemy wybrać według życzenia. Kondensatory można dowolnie łączyć w obwód, rozłączać i łączyć ponownie. Dobrać wartości C_1 i C_2 oraz zaprojektować takie połączenia i przełączenia, aby korzystając tylko z energii zmagazynowanej w pierwszym kondensatorze uzyskać baterię naładowaną do napięcia $2U$ i o maksymalnej możliwej pojemności zastępczej.

Czy możliwe jest wytworzenie napięcia $2U$, jeśli poza kondensatorem naładowanym dysponujemy tylko jednym kondensatorem dodatkowym oraz zwojnicą? Jeśli tak, to jaką pojemność baterii można uzyskać?

478. Oznaczmy kąt między pionem a promieniem koła poprowadzonym do punktu oderwania (albo – do punktu spadku) jako α, a czas lotu jako t. Wzdłuż osi poziomej ruch ciała jest jednostajny, zatem

$$2r\sin\alpha = \omega r\cos\alpha\cdot t, \tag{1}$$

natomiast wzdłuż osi pionowej mamy

$$2\omega r\sin\alpha = gt. \tag{2}$$

Ponadto jeśli ciało ma upaść na to samo miejsce koła, to kąt jego obrotu w ciągu czasu t powinien być równy $2\alpha + 2\pi n$ (gdzie n – liczba całkowita), czyli

$$\omega t = 2\alpha + 2\pi n. \tag{3}$$

Z równań (1) i (3) otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \pi n.$$

Dla $n = 0$ i $\alpha < \pi$ rozwiązanie nie istnieje, natomiast dla $n = 1$ rozwiązaniem jest $\alpha_1 = 1{,}352$ rad, a dla $n = 2$ mamy $\alpha_2 = 1{,}442$ rad. Ponieważ z równań (1) i (2) wynika

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r\cos\alpha}},$$

więc $\omega_1 = 12{,}3$ rad/s, $\omega_2 = 16{,}0$ rad/s.

479. Ponieważ przy ładowaniu jednego kondensatora z drugiego końcowe napięcie zawsze jest mniejsze od maksymalnego, więc żądane napięcie $2U$ można uzyskać tylko, łącząc wszystkie 3 kondensatory szeregowo (po uprzednim naładowaniu C_1 i C_2). Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do „zwykłego" połączenia szeregowego ładunki na tych kondensatorach nie będą na ogół jednakowe, zatem podczas rozładowania baterii poszczególne kondensatory nie rozładują się do zera. Nie ma to jednak znaczenia dla przepływu energii w obwodzie, do którego taka bateria byłaby dołączona (liczy się tylko całkowite napięcie i pojemność zastępcza). Rozważmy dwie najprostsze możliwości:

a) oba kondensatory C_1 i C_2 zostają naładowane jednocześnie, tzn. połączone równolegle i dołączone do C,
b) najpierw ładujemy kondensator C_1, następnie C_2 (oba przez dołączenie do C).

W przypadku a) na każdym kondensatorze wystąpi jednakowe napięcie $U' = UC/(C + C_1 + C_2)$, a jeśli zestawiona bateria ma mieć napięcie $2U$, to $U' = \frac{2}{3}U$, stąd $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}C$. Maksymalna wartość pojemności zastępczej

$$C_z = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

wystąpi dla $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}C$ i wynosi $C_z = \frac{1}{9}C$.

W przypadku b) na kondensatorze C_1 otrzymamy napięcie $U_1 = UC/(C + C_1)$, a potem na dwóch pozostałych napięcie $U_2 = U_1C/(C + C_2)$. Dalej postępujemy jak poprzednio: z warunku $U_1 + 2U_2 = 2U$ wyznaczamy związek między C_1 a C_2 (teraz ma on postać $(C + 2C_1)(C + C_2) = 2C^2$), a szukając maksymalnej wartości C_z, otrzymujemy $C_1 = \frac{1}{4}C$, $C_2 = \frac{1}{3}C$, $C_z = \frac{1}{8}C$.

Bardziej skomplikowane pomysły – np. po czynnościach opisanych w b) łączymy jeszcze C_1 z C_2 – nadają się już raczej tylko do analizy numerycznej. Autorowi nie udało się w żadnym z nich przekroczyć wartości osiągniętej w powyższym przypadku b), tzn. $C_z = \frac{1}{8}C$.

Jeśli mamy do dyspozycji kondensator o pojemności C_1 oraz zwojnicę (indukcyjność), to możemy zamknąć obwód zestawiony z wyjściowego kondensatora C i tych elementów, a następnie otworzyć go po upływie połowy okresu drgań. W tym momencie prąd nie płynie (tak jak w chwili początkowej), zatem energia zwojnicy jest równa zeru i – w odróżnieniu od obwodów poprzednich – zachowany jest nie tylko ładunek, lecz także energia kondensatorów. Oznaczając przez U' napięcie otrzymane na kondensatorze C, a przez U_1 napięcie na C_1, mamy równania

$$CU = CU' + C_1U_1, \qquad CU^2 = CU'^2 + C_1U_1^2,$$

zatem

$$U' = U\frac{C - C_1}{C + C_1}, \qquad U_1 = U\frac{2C}{C + C_1}.$$

Ponieważ suma tych napięć ma wynosić $2U$, więc $C_1 = \frac{1}{3}C$, a dalej $C_z = \frac{1}{4}C$. Wyniku tego nie można już poprawić, gdyż cała energia początkowa została przekształcona w energię „użyteczną" (jak łatwo sprawdzić, ładunki obu kondensatorów są jednakowe, więc razem z całą baterią także każdy oddzielnie rozładuje się do zera). Zaprojektowaliśmy zatem doskonały „transformator napięcia stałego" – gdyby jeszcze dało się skonstruować taki układ przełączników!