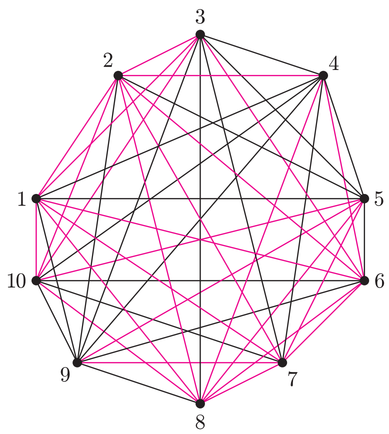
Zadanka (nie)informatyczne

1. Na płaszczyźnie wybrano dziesięć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe, i każdą parę różnych punktów połączono odcinkiem: kolorowym lub czarnym.



Ile jest na rysunku trójkątów jednobarwnych, mających wierzchołki w pewnych trzech spośród zadanych dziesięciu punktów?

2. Czy w poniższym ciągu liczb:

$$1,\ 1,\ 9,\ 7,\ 12,\ 4,\ 12,\ 5,\ 7,\ 3,\ 7,\ 2,\ 10,\ 2,\ 3$$

można znaleźć niepusty spójny podciąg (tj. jednokawałkowy fragment), którego suma jest podzielna przez 13?

3. Ile różnych podciągów ciągu:

$$3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3$$

ma sumy podzielne przez 5? Podciągi złożone z takich samych elementów, ale różnie umiejscowione w ciągu, uznajemy za różne. Ponadto pomijamy ciąg pusty (zeroelementowy).

A ile *spójnych* (czyli jednokawałkowych) podciągów o sumach podzielnych przez 5 występuje w powyższym ciągu?

4. Mamy do dyspozycji jedenaście monet o następujących nominałach:

$$7,\ 300,\ 35,\ 83,\ 1,\ 17,\ 2,\ 1,\ 17,\ 170,\ 5.$$

Jaka jest najmniejsza (całkowita dodatnia) kwota, której nie da się wypłacić za ich pomocą?

5. Na półce stoi dwanaście tomów encyklopedii. Ich kolejność, wskutek wieloletniego użytkowania, jest dosyć przypadkowa:

$$11,\ 1,\ 10,\ 4,\ 3,\ 2,\ 8,\ 7,\ 12,\ 6,\ 9,\ 5.$$

W jednym ruchu możesz wyjąć dowolny tom i umieścić go w wybranym miejscu, ewentualnie przesuwając pewne z pozostałych tomów. W jakiej najmniejszej liczbie ruchów możesz uporządkować wszystkie tomy, tak aby były ustawione w naturalnej kolejności od 1 do 12?

6. Zmieniasz zdanie i postanawiasz uporządkować tomy encyklopedii z zadania 5 za pomocą ruchów polegających na zamianie pewnych par sąsiednich tomów miejscami. Ile takich ruchów potrzeba do uporządkowania półki?

7. Niech $Z = \{1, 2, \ldots, 17\}$. W tym zadaniu interesować nas będą takie zbiory $A \subseteq Z$, że dla każdej liczby naturalnej $m \in Z$ co najwyżej jedna z liczb m, $2m$ należy do A (czyli dla żadnej liczby naturalnej $m \in Z$ nie mogą naraz zachodzić warunki $m \in A$ oraz $2m \in A$). Nazwijmy takie zbiory A *antydwójkowymi*.

Jaki jest najliczniejszy zbiór antydwójkowy? A ile jest wszystkich zbiorów antydwójkowych?

Jakub RADOSZEWSKI

Wskazówki

1. Zlicz wszystkie trójkąty *poza* jednobarwnymi.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		k	k	c	c	k	k	k	c	k
2	k		k	k	c	k	k	k	c	k
3	k	k		c	c	k	c	c	c	k
4	c	k	c		c	k	c	k	c	c
5	c	c	c	c		c	k	k	k	k
6	k	k	k	k	c		k	k	c	c
7	k	k	c	c	k	k		k	k	c
8	k	k	c	k	k	k	k		c	k
9	c	c	c	c	k	c	k	c		c
10	k	k	k	c	k	c	c	k	c	

Może Ci w tym pomóc powyższa tabelka, w której komórka leżąca na skrzyżowaniu i-tego wiersza i j-tej kolumny oznacza kolor (c – czarny, k – nie-czarny) odcinka łączącego punkty i-ty oraz j-ty.

2. Przede wszystkim policz, ile ten ciąg ma elementów. Następnie przyjrzyj się sumom kolejnych prefiksów (tj. początkowych fragmentów) tego ciągu.

3. Dla każdego prefiksu (tj. początkowego fragmentu) ciągu policz, ile podciągów w nim zawartych ma sumy dające reszty $0, 1, 2, 3, 4$ z dzielenia przez 5.

4. Uporządkujmy niemalejąco ciąg nominałów monet:

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 17,\ 17,\ 35,\ 83,\ 170,\ 300.$$

Przyjrzyj się teraz zbiorom kwot, które mogą zostać wypłacone za pomocą monet z kolejnych prefiksów uporządkowanego ciągu.

5. Jak może wyglądać zbiór tomów, które mogą *nie zostać ani razu przestawione*?

6. W jednej serii ruchów doprowadź do sytuacji, w której pierwszy tom znajdzie się na początku półki. Następnie „usuń” ten tom i powtarzaj tę samą procedurę dla tomów $2, \ldots, 12$.

7. Wypisz wszystkie liczby naturalne od 1 do 17 i połącz za pomocą krawędzi wszystkie pary postaci $(m, 2m)$.