Rozwiązanka zadanek (nie)informatycznych

1. Wszystkich trójkątów o wierzchołkach w wybranych punktach jest

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Zamiast zliczać trójkąty jednobarwne, przyjrzymy się różnobarwnym (mającym dwa boki tego samego koloru i trzeci innego), po czym odejmiemy ich liczbę od 120.

Każdy trójkąt różnobarwny ma dokładnie *dwa* wierzchołki, w których spotykają się dwa różnokolorowe boki; co więcej, każde takie spotkanie różnokolorowych boków wyznacza (niezależnie od koloru trzeciego boku) trójkąt różnobarwny. Dla każdego punktu wyznaczmy zatem liczby kończących się w nim kolorowych i czarnych odcinków – wyniki, w postaci par (kolorowe, czarne), znajdują się w tabelce

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1		k	k	c	c	k	k	k	c	k	(6, 3)
2	k		k	k	c	k	k	k	c	k	(7, 2)
3	k	k		c	c	k	c	c	c	k	(4, 5)
4	c	k	c		c	k	c	k	c	c	(3, 6)
5	c	c	c	c		c	k	k	k	k	(4, 5)
6	k	k	k	k	c		k	k	c	c	(6, 3)
7	k	k	c	c	k	k		k	k	c	(6, 3)
8	k	k	c	k	k	k	k		c	k	(7, 2)
9	c	c	c	c	k	c	k	c		c	(2, 7)
10	k	k	k	c	k	c	c	k	c		(5, 4)

– a następnie zsumujmy iloczyny tych par:

$$18 + 14 + 20 + 18 + 20 + 18 + 18 + 14 + 14 + 20 = 174.$$

W ten sposób otrzymamy *podwojoną* liczbę trójkątów różnobarwnych. Stąd liczba trójkątów jednobarwnych to:

$$120 - 174/2 = 33.$$

2. Jeżeli zaczniemy wyznaczać kolejne sumy prefiksów naszego ciągu (a dokładniej reszty z dzielenia ich przez 13), to gdy tylko natrafimy na zero, będzie znaczyło, że znaleźliśmy jeden z szukanych podciągów o sumie podzielnej przez 13. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że taka sytuacja nie występuje w przypadku naszego ciągu. Czy jest to jedyny przypadek, dla którego odpowiedź na postawione pytanie mogłaby być pozytywna? Oczywiście nie: może się też zdarzyć, że suma i-tego prefiksu będzie równa sumie jakiegoś j-tego prefiksu ($i < j$) – wówczas fragment ciągu od wyrazu $(i+1)$-szego do j-tego włącznie będzie jednym z szukanych podciągów, gdyż jego suma jest różnicą sum tych prefiksów.

Podany ciąg ma 15 elementów, a wartości sum prefiksów są liczbami od 0 do 12 (modulo 13). To oznacza, że wśród tych sum musi się jakaś powtórzyć (fakt ten nazywa się mądrze Zasadą Szufladkową Dirichleta), dzięki czemu *niezależnie od konkretnych wartości wyrazów ciągu* będziemy mogli znaleźć żądany spójny podciąg sumujący się do wielokrotności 13.

Jeżeli Czytelnik nie wierzy w całe to abstrakcyjne rozumowanie, to proponujemy przyjrzeć się resztom z dzielenia przez 13 sum kolejnych prefiksów wyjściowego ciągu:

$$1, 2, 11, 5, 4, 8, 7, 12, 6, 9, 3, 5, 2, 4, 7.$$

Mamy tu jakieś powtórzenia – wybierzmy z nich, powiedzmy, parę piątek. Wyznaczają one fragment wyjściowego ciągu od piątego do dwunastego wyrazu:

$$12, 4, 12, 5, 7, 3, 7, 2,$$

którego suma jest równa $52 = 4 \cdot 13$.

3. Wskazówka do zadania podpowiada, co należy policzyć, jednakże nie daje żadnej informacji o tym, jak to zrobić. Spróbujmy zatem wykonać „ręcznie” kilka pierwszych kroków, może coś z tego wyjdzie. Przypomnijmy jeszcze nasz ciąg:

$$3, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 3.$$

Początek jest prosty – dla pierwszego prefiksu mamy tylko jeden podciąg [3], więc tabelka wyników dla reszt od 0 do 4 wygląda tak: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}$. Podciągi kolejnego prefiksu to: [3], [2] oraz [3, 2] – daje to tabelkę: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&1&0\\\hline\end{array}$.

A jak wyglądają podciągi prefiksu 3, 2, 3? Podzielmy je na dwie grupy – na podciągi prefiksu o jeden krótszego oraz na te, które zawierają końcową trójkę prefiksu. Tabelkę wyników dla tych pierwszych już wypisaliśmy. Natomiast sumy podciągów z drugiej grupy są takie same, jak sumy podciągów z pierwszej, tylko powiększone o 3. Daje to tabelkę wyników: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&1&0\\\hline\end{array}$ przesuniętą cyklicznie o 3 w stosunku do poprzedniej tabelki. Wystarczy teraz wysumować obie te tabelki i jesteśmy w domu:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&1&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&1&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&1&2&0\\\hline\end{array}.$$

Sprawdźmy, czy o niczym nie zapomnieliśmy: dwa podciągi [3, 2] i [2, 3] mają sumy podzielne przez 5, podciąg [3, 3] daje resztę 1, podciąg [2] – resztę 2, a podciągi dające resztę 3 to [3] oraz [3, 2, 3]. Chwila, ale pierwszy z tych podciągów powinniśmy policzyć dwukrotnie, gdyż w naszym prefiksie mamy dwie trójki! To pokazuje, że w naszych obliczeniach zapomnieliśmy o jednoelementowym podciągu odpowiadającym ostatniemu elementowi rozważanego prefiksu – faktycznie, nie załapał się on do żadnej z rozważanych grup. Po jego uwzględnieniu (trzecia tabelka) otrzymujemy już poprawny wynik:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&1&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&1&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&1&3&0\\\hline\end{array}.$$

Dla kolejnego prefiksu – 3, 2, 3, 4 – możemy postąpić podobnie. Wystarczy zsumować trzy tabelki: poprzednią, poprzednią przesuniętą cyklicznie o 4 oraz tabelkę odpowiadającą podciągowi [4]:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&1&3&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&0&2\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&4&3&3\\\hline\end{array}.$$

Teraz możemy już stosunkowo łatwo wykonać kolejne kroki, odpowiadające elementom 1, 1, 2, 3:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&4&3&3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&3&2&4&3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6&6&6&7&6\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6&6&6&7&6\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6&6&6&6&7\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 12&13&12&13&13\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 12&13&12&13&13\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 13&13&12&13&13\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 25&26&25&26&25\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 25&26&25&26&25\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 25&26&25&25&26\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \mathbf{50}&52&50&52&51\\\hline\end{array}.$$

Ostatecznie mamy więc 50 podciągów wyjściowego ciągu, których sumy dzielą się przez 5 – wypisanie ich wszystkich byłoby bardzo żmudnym zadaniem. A Tobie, Czytelniku, pozostawiamy wyznaczenie liczby *spójnych* podciągów o sumach podzielnych przez 5. Można do tego podejść całkiem podobnie; tym razem jednak w wyliczanych tabelkach należy uwzględnić tylko spójne podciągi kończące się na ostatnich pozycjach kolejnych prefiksów ciągu. Dodajmy, że w wyniku powinno się otrzymać 6.

4. Przyjrzyjmy się kolejnym zbiorom kwot wspomnianym we wskazówce – może uda nam się zauważyć coś ciekawego. Przypomnijmy postać uporządkowanego ciągu:

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 17,\ 17,\ 35,\ 83,\ 170,\ 300.$$

Za pomocą pierwszych dwóch jedynek można wypłacić wszystkie kwoty całkowite z przedziału $[0,2]$. Jeżeli dołączymy do tego dwójkę, to, jak łatwo sprawdzić, możemy wypłacić wszystkie kwoty z przedziału $[0,4]$. Dołóżmy teraz monetę o nominale 5. Czy za pomocą poprzednich monet oraz piątki możemy wypłacić wszystkie kwoty od 0 do $4+5=9$? Otóż tak: kwoty mniejsze od 5 wypłacamy za pomocą wcześniejszych monet (można nimi wypłacić wszystkie kwoty z przedziału $[0,4]$), a dowolną kwotę k od 5 do 9 – za pomocą piątki i układu wcześniejszych monet o sumie $k-5$, która to wartość dla każdej z rozważanych wartości k „szczęśliwie" należy do przedziału $[0,4]$.

Już mniej więcej widać, jak kontynuować to rozumowanie. Jeżeli za pomocą pewnych początkowych monet można wypłacić kwoty z przedziału $[0,M]$ i kolejną monetą jest $a_i \leqslant M+1$, to za pomocą zbioru monet powiększonego o a_i można wypłacić każdą kwotę z przedziału $[0, M+a_i]$ – kwoty od 0 do a_i-1 (przypomnijmy, że $a_i - 1 \leqslant M$) tylko za pomocą wcześniejszych monet, a pozostałe z użyciem a_i i pewnych wcześniejszych monet. A co, jeżeli $a_i > M+1$? Wówczas, ponieważ wszystkie kolejne po a_i monety mają nominały nie mniejsze niż nominał a_i, to na pewno za pomocą naszych monet nie da się wypłacić kwoty $M+1$ (i jest to wówczas najmniejsza taka kwota).

Stosując opisaną regułę do kolejnych monet z zestawu, otrzymujemy: przedział $[0,9]$ i moneta 7 dają przedział $[0,16]$, który wraz z monetą 17 daje przedział $[0,33]$, który po dołączeniu kolejnej siedemnastki daje $[0,50]$, co wraz z monetą 35 daje $[0,85]$, do czego, dokładając monetę 83, otrzymujemy $[0,168]$, co wraz z 170 daje… no właśnie, w tym miejscu trzeba przerwać naszą wyliczankę z wnioskiem, że najmniejszą kwotą, jakiej nie da się wypłacić, jest $168+1=169$.

Na koniec pytanie kontrolne do Czytelnika: jakie byłoby rozwiązanie zadania, gdybyśmy z powyższą „wyliczanką" doszli do końca ciągu nominałów monet?

5. Zbiór tomów, które mogą nie zostać ani razu ruszone, musi, oczywiście, stanowić podciąg rosnący (pod względem numerów) wyjściowego ciągu tomów. Z drugiej strony, jeżeli wybierzemy jakikolwiek podciąg rosnący w rzędzie tomów i postanowimy sobie, że właśnie tych tomów nie zamierzamy ruszać, to możemy każdy z pozostałych tomów, poczynając od tych o najmniejszych numerach, wstawić w jednym ruchu we właściwe miejsce w ramach tego podciągu. Skoro tak, to wybierzmy najdłuższy taki podciąg rosnący; szukana minimalna liczba ruchów będzie wówczas równa 12 minus długość tego ciągu.

Jak w systematyczny sposób wyznaczyć długość najdłuższego podciągu rosnącego naszego ciągu

$$11,\ 1,\ 10,\ 4,\ 3,\ 2,\ 8,\ 7,\ 12,\ 6,\ 9,\ 5?$$

Można chociażby dla każdego elementu policzyć długość najdłuższego podciągu rosnącego kończącego się na nim, a potem wziąć największą spośród tych wartości.

Dla każdego z pierwszych dwóch tomów szukanym wynikiem jest 1. Trzeci tom ma numer 10, więc można za jego pomocą przedłużyć jednoelementowy ciąg rosnący kończący się na tomie numer 1, otrzymując ciąg długości 2. Podobnie ma się sytuacja w przypadku każdego z kolejnych trzech tomów: 4, 3, 2 – daje to ciąg początkowych wyników:

tomy:	11	1	10	4	3	2
długości podciągów:	1	1	2	2	2	2

Kolejny tom, ten o numerze 8, może zostać użyty nie tylko do przedłużenia wspomnianego już ciągu jednoelementowego, ale także każdego spośród stworzonych już ciągów dwuelementowych, które kończą się tomami o numerach mniejszych niż 8, tj. 4, 3 i 2. To oznacza, że wynikiem dla tego tomu jest 3:

tomy:	11	1	10	4	3	2	8
długości podciągów:	1	1	2	2	2	2	3

Widać już, jak kontynuować te obliczenia – wystarczy każdorazowo wybierać najdłuższy ciąg spośród dotychczas utworzonych, kończący się tomem o numerze mniejszym niż numer rozważanego tomu, i ten właśnie ciąg przedłużać. W ten sposób otrzymamy następującą tabelkę wyników:

tomy:	11	1	10	4	3	2	8	7	12	6	9	5
długości podciągów:	1	1	2	2	2	2	3	3	**4**	3	**4**	3

Stąd najmniejsza konieczna liczba ruchów jest równa $12-4=8$. Pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie znalezienie jakiegoś 4-elementowego podciągu rosnącego tomów i wykonanie ośmiu ruchów, po których ciąg tomów stanie się uporządkowany rosnąco.

6. Zastanówmy się najpierw, jak najwygodniej zrealizować procedurę opisaną we wskazówce. Otóż wystarczy kolejno wykreślać tomy od pierwszego do dwunastego, a w momencie wykreślania powiększać wynik o liczbę niewykreślonych jeszcze tomów położonych na lewo od wykreślanego (odpowiada to przesunięciu tomu na początek półki i wyeliminowaniu go z dalszych rozważań). Wynik zastosowania tego postępowania do naszego ciągu obrazuje tabelka

11	$\cancel{1}$	10	4	3	2	8	7	12	6	9	5	wynik: 1
11	$\cancel{1}$	10	4	3	$\cancel{2}$	8	7	12	6	9	5	wynik: 5
11	$\cancel{1}$	10	4	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	8	7	12	6	9	5	wynik: 8
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	8	7	12	6	9	5	wynik: 10
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	8	7	12	6	9	$\cancel{5}$	wynik: 17
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	8	7	12	$\cancel{6}$	9	$\cancel{5}$	wynik: 22
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	8	$\cancel{7}$	12	$\cancel{6}$	9	$\cancel{5}$	wynik: 25
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	12	$\cancel{6}$	9	$\cancel{5}$	wynik: 27
11	$\cancel{1}$	10	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	12	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	$\cancel{5}$	wynik: 30
11	$\cancel{1}$	$\cancel{10}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	12	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	$\cancel{5}$	wynik: 31
$\cancel{11}$	$\cancel{1}$	$\cancel{10}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	12	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	$\cancel{5}$	wynik: 31
$\cancel{11}$	$\cancel{1}$	$\cancel{10}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	$\cancel{12}$	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	$\cancel{5}$	wynik: 31

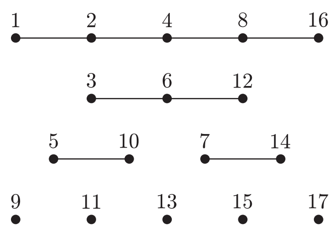
A zatem udało nam się uporządkować półkę za pomocą 31 ruchów. Poszło nam całkiem łatwo, ale musimy sobie jeszcze odpowiedzieć na pytanie, czy aby na pewno wykonaliśmy najmniejszą możliwą liczbę ruchów?

Powiemy, że dwa tomy na półce tworzą *inwersję*, jeżeli pierwszy z nich leży na lewo od drugiego oraz ma numer większy od drugiego (przykładem takiej sytuacji są tomy o numerach 7 i 10 na naszej „początkowej" półce). Zauważmy, że:

- na uporządkowanej rosnąco półce nie ma żadnych inwersji – a do takiego układu dążymy;
- jeden ruch, czyli zamiana miejscami sąsiednich tomów, może zmienić liczbę inwersji co najwyżej o 1 (tj. dodać lub usunąć inwersję między przestawianymi tomami);
- w naszej metodzie w każdym ruchu przenosimy mniejszy element na lewo, czyli usuwamy jedną inwersję.

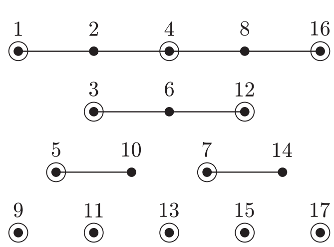
Wniosek: wymagana liczba ruchów jest co najmniej tak duża jak liczba inwersji w ciągu, a z drugiej strony liczba ruchów wykonywanych w naszej metodzie jest dokładnie taka sama jak liczba inwersji. To uzasadnia, że nasza metoda daje najlepszy możliwy wynik dla dowolnej początkowej postaci półki, a w szczególności dla tej z naszego zadania.

7. Na początku zastosujemy się do zalecenia ze wskazówki i połączymy krawędziami wszystkie pary $(m, 2m)$ dla $m \in Z$ (dla przypomnienia: $Z = \{1, 2, \ldots, 17\}$). Żeby się przy tym przypadkiem nie pomylić, spróbujmy zabrać się do tego jakoś systematycznie, np. po kolei. 1 powinna być połączona z 2, 2 z 4, 4 z 8, 8 z 16, no i to tyle, bo $2 \cdot 16 > 17$ – daje to nam taki łańcuszek kolejnych połączeń. Kolejną niepołączoną jeszcze z niczym liczbą jest 3; z 3 krawędź powinna prowadzić do 6, z 6 do 12, a 12 kończy ten łańcuszek. Dokładając do tego kolejne łańcuszki rozpoczynające się od 5, 7 itd., otrzymujemy następujący obrazek:



To było całkiem łatwe, ale... po co w ogóle konstruowaliśmy te łańcuszki? Otóż przyjrzyjmy się temu, jak w tę konfigurację wpisują się zbiory antydwójkowe. Każdy taki zbiór A ma tę własność, że dla każdej pary $m, 2m$ $(m \in Z)$ zachodzi $m \notin A$ lub $2m \notin A$, czyli w A nie może znaleźć się naraz żadna para liczb połączonych krawędzią na powyższym rysunku. Zauważmy, że łańcuszki możemy rozpatrywać oddzielnie, gdyż są one całkowicie niezależne – to, jakie liczby wybierzemy do zbioru antydwójkowego z jednego łańcuszka, nie ma zupełnie wpływu na nasz wybór w pozostałych łańcuszkach.

Aby skonstruować najliczniejszy zbiór antydwójkowy A, musimy zatem z każdego łańcuszka wybrać jak najwięcej liczb. Z łańcuszków jednoelementowych (czyli takich bez krawędzi) możemy do A wziąć, oczywiście, po co najwyżej jednym elemencie. Również tylko tyle uda nam się wybrać z każdego z łańcuszków dwuelementowych. W łańcuszku trzyelementowym możemy sobie już pozwolić na wybór dwóch liczb: 3 i 12 (gdybyśmy wzięli 6, to nie moglibyśmy już wziąć ani 3, ani 12). Podobnie, wybierając co drugi element z najdłuższego łańcuszka, możemy do A dołożyć jeszcze trzy liczby.



Ostatecznie szukanym najliczniejszym zbiorem antydwójkowym jest na przykład:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17\}.$$

A jakie są inne najliczniejsze? I ile ich jest?

Przejdźmy teraz do pytania o liczbę wszystkich zbiorów antydwójkowych. Łatwo przekonać się, że może ich być dosyć sporo – chociażby każdy podzbiór naszego najliczniejszego zbioru A jest zbiorem antydwójkowym, a wszystkich takich podzbiorów jest już $2^{12} = 4\,096$ (!). Skoro podział na łańcuszki już raz okazał się skuteczny, to może pomoże nam także i tym razem? Spróbujmy! Przypomnijmy sobie, że każdy zbiór antydwójkowy możemy konstruować, dołączając do niego niezależnie wybrane elementy z poszczególnych łańcuszków. Przeanalizujmy więc kolejno wszystkie łańcuszki, powiedzmy, znów poczynając od najkrótszych, i przyjrzyjmy się temu, na ile sposobów można z każdego z nich wybrać pewną liczbę elementów (potencjalnie 0), tak aby nie uzyskać żadnej pary liczb połączonych krawędzią.

W każdym łańcuszku jednoelementowym mamy tylko jeden wybór: albo bierzemy jego jedyny element, albo nie – to daje każdorazowo dokładnie dwie możliwości. Dla łańcuszków dwuelementowych mamy trzy możliwości: albo nie bierzemy żadnego elementu (możemy to uczynić na jeden sposób), albo bierzemy dokładnie jeden element (dwa sposoby). Dalej sytuacja zaczyna się powoli komplikować, więc spróbujmy wymyślić jakiś bardziej systematyczny sposób postępowania. Przyjrzyjmy się przypadkowi łańcuszka trzyelementowego; jednym z wyborów, jakie musimy dla niego podjąć, jest to, czy wziąć do zbioru ostatni jego element, czy też nie. W pierwszym z tych przypadków wiemy, że środkowego elementu nie możemy już wybrać, stąd problem sprowadza się do zdecydowania, co zrobić z pozostałym jednym elementem, który to element jest w szczególności łańcuszkiem jednoelementowym. Z kolei w drugim przypadku nie mamy nałożonych żadnych dodatkowych ograniczeń na wybór pozostałych dwóch elementów łańcuszka, czyli mamy do zagospodarowania łańcuszek dwuelementowy. Ostatecznie, wynik dla trzyelementowego łańcuszka jest sumą wyników dla łańcuszków dwu- i jednoelementowego, czyli $2 + 3 = 5$. Łatwo sprawdzić, że niczego nie pominęliśmy: np. dla trzyelementowego łańcuszka z naszego obrazka mamy następujące pięć możliwości wyboru elementów do zbioru antydwójkowego: $\emptyset$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{12\}$ oraz $\{3, 12\}$.

Odtąd już pójdzie zupełnie łatwo. Wynik dla łańcuszka czteroelementowego (w naszym podziale żaden taki nie występuje) to suma wyników dla dwuelementowego (odpowiada to sytuacji, w której do zbioru wybieramy ostatni element łańcuszka) oraz trzyelementowego (co odpowiada przypadkowi przeciwnemu), czyli $3 + 5 = 8$. Wreszcie dla łańcuszka pięcioelementowego mamy $5 + 8 = 13$ możliwości wyboru elementów do zbioru. Wreszcie łączna liczba zbiorów antydwójkowych jest iloczynem liczb możliwości wyboru dla poszczególnych łańcuszków, a zatem jest równa 13 (jeden pięcioelementowy) razy 5 (jeden trzyelementowy) razy 3^2 (dwa dwuelementowe) razy 2^5 (pięć jednoelementowych), czyli 18 720, czyli rzeczywiście dosyć dużo.

Na koniec dwie rzeczy: ciekawostka i zagadka. Ciekawostka: liczby oznaczające ilości sposobów wyboru zbioru antydwójkowego z łańcuszków kolejnych długości, tzn. 2, 3, 5, 8, 13, ..., to tzw. *liczby Fibonacciego*. A pojawienie się tych liczb w naszym zadaniu nie jest tylko osamotnionym przypadkiem – jakoś tak się składa, że ciąg Fibonacciego występuje w wielu miejscach, często bardzo zaskakujących, zarówno w matematyce i informatyce, jak i w biologii, muzyce...