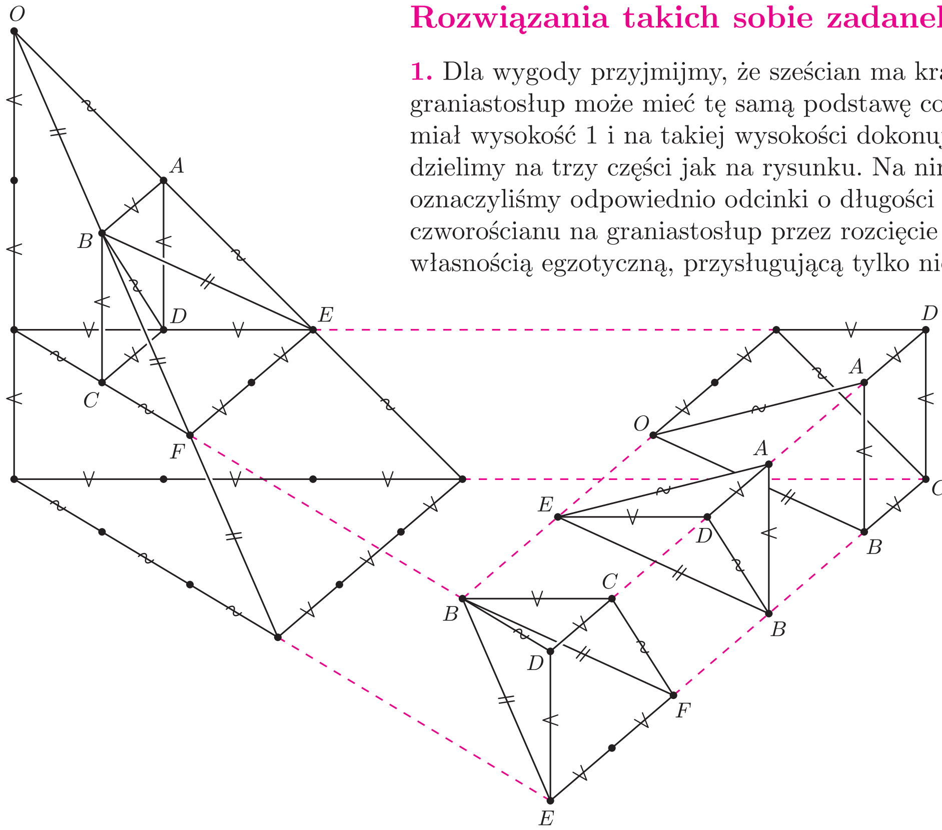
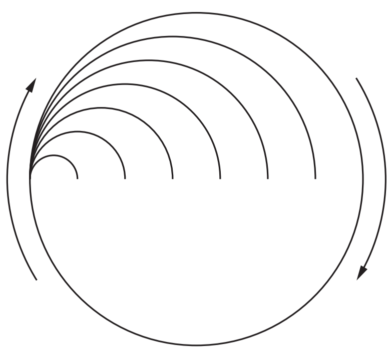
Rozwiązania takich sobie zadanek

1. Dla wygody przyjmijmy, że sześcian ma krawędź długości 3. Poszukiwany graniastosłup może mieć tę samą podstawę co czworościan – wtedy będzie miał wysokość 1 i na takiej wysokości dokonujemy pierwszego cięcia. Resztę dzielimy na trzy części jak na rysunku. Na nim tymi samymi symbolami oznaczyliśmy odpowiednio odcinki o długości 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Możliwość przerobienia czworościanu na graniastosłup przez rozcięcie i przemieszczenie części jest własnością egzotyczną, przysługującą tylko niektórym czworościanom.



2. Samolot do Modlina będzie leciał szybciej niż bez wiatru, a więc krócej, a z powrotem do Dęblina wolniej niż bez wiatru, a więc dłużej. Zatem skoro będzie leciał krócej z większą przędkością, a dłużej z mniejszą, więc jego średnia prędkość będzie mniejsza niż bez wiatru. Zatem przelot będzie trwał dłużej niż bez wiatru. Do znalezienia rozwiązania dane liczbowe są zbędne.



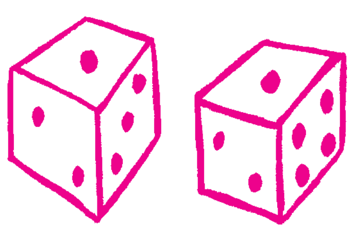
3. Gdy średnica największego koła jest równa 1, pole między k-tym i $k+1$-wszym półokręgiem (oznaczmy je $P_{k,\,k+1}$) jest równe

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{k+1}{2\cdot 7}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{2\cdot 7}\right)^2 = \frac{\pi}{392}\cdot(2k+1).$$

Ponieważ każda z części ma dla odpowiedniego k pole równe $P_{k,\,k+1} + P_{7-k-1,\,7-k}$, czyli

$$\frac{\pi}{392}((2k+1)+(2(7-k-1)+1)) = \frac{\pi}{392}\cdot 14 = \frac{\pi}{28},$$

co nie zależy od k – wszystkie części mają więc równe pola. Łatwo zauważyć, że liczba 7 może być zastąpiona dowolną liczbą naturalną $n>1$.



4. Na przeciwległych dwóch ściankach sześcianików umieśćmy liczby 1 i 6. Na dwóch innych przeciwległych 2 i 5. Każdy z tych sześcianików okaże się jednakowy – można wszystkie je ustawić jeden obok drugiego w takiej samej pozycji. Pozostaje więc rozmieszczenie liczb 3 i 4. Różne kostki mogą więc być co najwyżej dwie i faktycznie są dwie: kostki widoczne na rysunku są różne.

5. Jedyną taką liczbą jest $\frac{a}{b}$, albowiem

$$\frac{a+p}{b+q} = \frac{a}{b} \iff b(a+p) = a(b+q) \iff ba+bp = ab+aq \iff bp = aq \iff \frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

6. Półprosta wychodząca z dowolnego punktu ograniczonego obszaru, którego brzegiem jest krzywa zamknięta, przecina brzeg tej krzywej w nieparzystej liczbie punktów (bo „w końcu” będzie na zewnątrz tego obszaru). Natomiast wychodząca z punktu na zewnątrz – w parzystej liczbie punktów (zero też jest parzyste). Stąd narysowany punkt znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego.