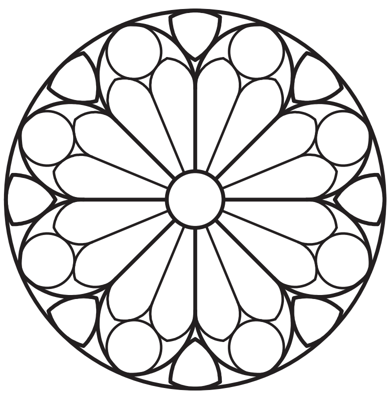
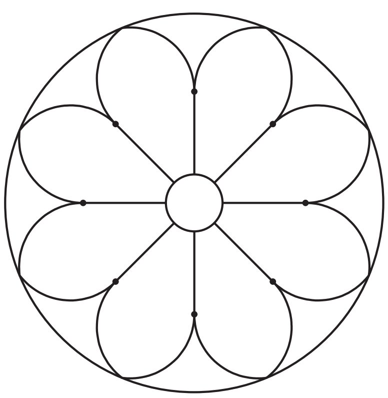
mała delta

Rozeta katedry w Metz



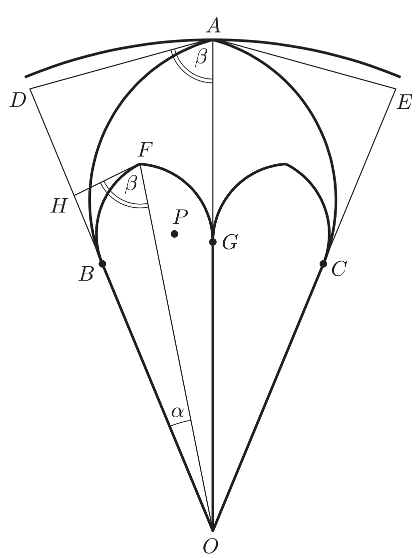
Rys. 1

W tym artykule zaczniemy analizować rozetę katedry w Metz. Zaczniemy od wpisania w okrąg ośmiu ostrołuków. Z poprzedniego artykułu (*Delta* 7/2009) pamiętamy, że ostrołuk wpisany w okrąg jest charakteryzowany kątem β przy wierzchołku ostrołuku. Można powiedzieć, że ten kąt β określa rozwartość ostrołuku. W naszej rozecie wybieramy $\beta = 75^\circ$ i wpisujemy w rozetę osiem takich ostrołuków. Widzimy je na rysunku 2, na którym także zaznaczono punkty styczności ostrołuków z promieniami. Chcemy teraz wpisać w te ostrołuki po dwa mniejsze ostrołuki z zachowaniem dwóch warunków: rozwartości tych mniejszych ostrołuków są takie same jak dużych (a więc kąty β wszystkich ostrołuków mają być takie same) oraz mniejsze ostrołuki mają być styczne do promieni w tych samych punktach co duże. Przyjrzyjmy się na rysunku 3 takim mniejszym ostrołukom wpisanym w jeden z naszych ośmiu dużych ostrołuków.

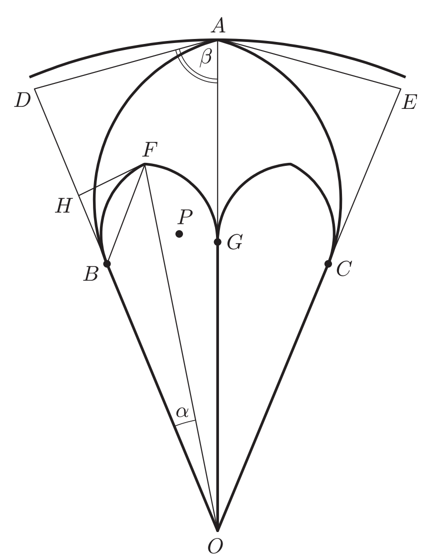


Rys. 2

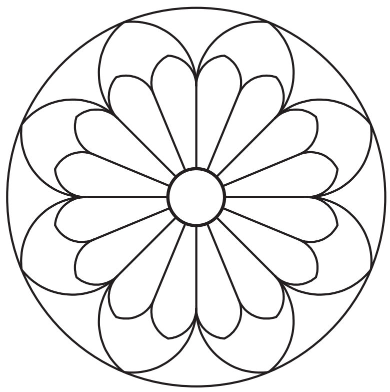
Duży ostrołuk o wierzchołku w punkcie A jest styczny do promieni w punktach B i C. Rozwartość tego ostrołuku jest wyznaczona przez kąt OAD równy β (przypominamy z poprzedniego artykułu, że prosta AD jest styczna do ostrołuku w punkcie A). Tę samą rozwartość mają mniejsze ostrołuki. Zatem $\sphericalangle OFH = \beta$. Oznaczmy wreszcie $\alpha = \sphericalangle FOH$ (znów prosta FH jest styczna do mniejszego ostrołuku w punkcie F). W przypadku katedry w Metz mamy, oczywiście, $\sphericalangle EOD = 45^\circ$ oraz $\alpha = \frac{1}{4} \cdot \sphericalangle EOD = 11{,}25^\circ$, a także $\beta = 75^\circ$. Ważne jest dla nas to, że oba kąty α i β dają się łatwo skonstruować cyrklem i linijką. Oba ostrołuki, większy i mniejszy, są styczne do półprostej OD w tym samym punkcie B. Teraz zauważamy, że $\sphericalangle OHF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Odcinki HF i HB są odcinkami stycznymi do tego samego okręgu, a więc są równe.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Trójkąt BFH jest równoramienny oraz $\sphericalangle BHF = 180° - (\alpha+\beta)$, a więc $\sphericalangle HBF = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Teraz już łatwo konstruujemy mniejszy ostrołuk. Punkt F leży na dwusiecznej kąta AOD oraz na półprostej o początku w punkcie B, tworzącej z prostą OD kąt DBF równy $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Wreszcie środek P okręgu, którego łukiem jest łuk BF mniejszego ostrołuku, leży na symetralnej odcinka BF i na prostej prostopadłej do odcinka HF i przechodzącej przez punkt F. Tak więc mniejsze ostrołuki możemy uznać za skonstruowane. Mały wewnętrzny okrąg dobieramy, kierując się naszym wyczuciem proporcji. Mamy więc część rozety z Metz pokazaną na rysunku 5. W następnym artykule zajmiemy się wpisaniem trójkątów Reuleaux w części rozety między dużymi ostrołukami, a w kolejnych artykułach zajmiemy się wpisaniem okręgów stycznych wewnętrznie do dużych ostrołuków i zewnętrznie do mniejszych.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 15 i A 16 czekamy do 1 września 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs *Delty*".

A 15. Czarna dziura ma promień (dokładniej, promień horyzontu) określony przez jej masę M i równy $2\mathrm{G}M/\mathrm{c}^2$, gdzie G jest stałą grawitacji, a c jest prędkością światła. Jaki promień ma czarna dziura o masie równej masie Ziemi? Potrzebne wielkości należy wziąć z tablic. [1 pkt]

A 16. Oczywiście takie rozwiązanie nie jest realizowane w misjach na Marsa, ale zastanówmy się nad taką ewentualnością. Sterowany z Ziemi robocik porusza się ze stałą prędkością po powierzchni Marsa. Jaka jest jego największa bezpieczna prędkość, jeżeli umieszczona na nim kamera daje dobry obraz tylko na odległość $d = 10$ m, a światło biegnie z Marsa na Ziemię, w zależności od położenia na orbicie, czasami nawet około $t_p = 20$ min? [2 pkt]

Rozwiązania zadań z numeru 6/2009

A 11. Zakładamy, że atmosfera składa się tylko z wodoru. Z warunków zadania wiemy, że siła grawitacji równa jest sile związanej z ciśnieniem promieniowania: $F_{\mathrm{gr}} = F_{\mathrm{rad}}$, a więc

$$\frac{\mathrm{G}M_{\mathrm{NS}}m_{\mathrm{H}}}{R_{\mathrm{NS}}^2} = \frac{f_{\mathrm{em}}\sigma}{\mathrm{c}}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$f_{\mathrm{em}} = \frac{\mathrm{G}M_{\mathrm{NS}}m_{\mathrm{H}}\mathrm{c}}{\sigma R_{\mathrm{NS}}^2}.$$

Jasność źródła wynosi $4\pi R_{\mathrm{NS}}^2 f_{\mathrm{em}} = 4\pi d^2 f_{\mathrm{obs}}$, stąd ostatecznie otrzymujemy odległość do źródła:

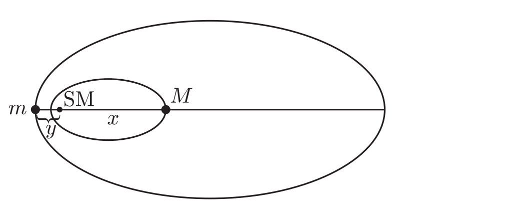
$$d = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M_{\mathrm{NS}}m_{\mathrm{H}}\mathrm{c}}{\sigma f_{\mathrm{obs}}}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych wynosi ona

$$d \approx 9{,}88 \text{ kpc}.$$

A 12. Przedstawione poniżej rozwiązanie jest ogólne, nie zaniedbujemy ruchu masywniejszego obiektu wokół środka masy.

Niech m oznacza masę gwiazdy neutronowej, M zaś masę towarzysza, x – odległość towarzysza od środka masy, a y – odległość gwiazdy neutronowej od środka masy (rysunek).



W takim przypadku odległość składników wynosi $x + y$.

Siła grawitacji działająca na gwiazdę neutronową to

$$F_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{NS}} = \frac{\mathrm{G}mM}{(x+y)^2},$$

natomiast działająca na nią siła związana z ruchem orbitalnym jest równa

$$F_{\mathrm{o}}^{\mathrm{NS}} = \frac{mV_{\mathrm{NS}}^2}{y} = \frac{m}{y}\left(\frac{2\pi y}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 my}{T^2}.$$

Skoro w ruchu po orbicie siły te się równoważą, to przyrównując je, otrzymujemy

$$4\pi^2 y(x+y)^2 = \mathrm{G}MT^2. \tag{1}$$

Analogiczne równania dostajemy dla towarzysza:

$$F_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{G}Mm}{(x+y)^2} \quad \text{oraz} \quad F_{\mathrm{o}}^{\mathrm{t}} = \frac{4\pi^2 Mx}{T^2}$$

i po przyrównaniu ich i przekształceniu mamy

$$4\pi^2 x(x+y)^2 = \mathrm{G}mT^2. \tag{2}$$

Dzieląc równania (1) i (2) stronami, otrzymujemy

$$y = Mx/m$$

i podstawiamy do (2), stąd

$$x = m\sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}T^2}{4\pi^2(m+M)^2}},$$

oraz

$$y = M\sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}T^2}{4\pi^2(m+M)^2}}.$$

Stąd ostatecznie odległość składników wynosi

$$r = x + y = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}T^2(m+M)}{4\pi^2}}.$$

Podstawiając wielkości liczbowe, otrzymujemy

$$r \approx 4{,}516 \cdot 10^{12} \text{ cm} \approx 0{,}302 \text{ AU}.$$