Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

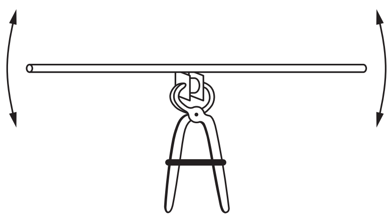
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2009

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

476. Dwie małe płytki ołowiane ustawiono pionowo, przedzielając je kawałkiem korka, ściśnięto obcęgami, zawiązując rączki drutem i zamocowano obcęgi nieruchomo. Gdy na płytkach poziomo położono rozgrzany pręt metalowy, zaczął się on „kołysać” – przechylać na przemian w jedną i drugą stronę (rysunek). Wyjaśnić przyczynę zjawiska.



477. Małe ciało (punkt materialny) porusza się po „powierzchni śrubowej”, opisanej równaniami parametrycznymi

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,\quad z = d\alpha \quad (r \text{ i } \alpha \text{ – zmienne niezależne, } d \text{ – stała}).$$

Jedyną siłą działającą na ciało jest siła utrzymująca je na tej powierzchni, skierowana prostopadle do niej. W chwili początkowej zmienna r miała wartość r_0, a prędkość tworzyła z wektorem $[r_0\cos\alpha_0, r_0\sin\alpha_0, 0]$ kąt β (ze zwrotem w stronę osi $r=0$, tzn. początkowo r malało). Jaki warunek powinny spełniać wymienione parametry, aby ciało nie trafiło w oś? Jeśli ten warunek jest spełniony, to jaką minimalną wartość osiągnęła zmienna r podczas ruchu ciała?

476. Podczas zetknięcia z ołowianą płytką pręt przekazuje jej ciepło, a wzrost temperatury powoduje rozszerzanie się płytki i „odepchnięcie” pręta w górę. Płytki ołowiane lepiej się do tego nadają, niż np. stalowe, bo współczynnik rozszerzalności cieplnej ołowiu jest stosunkowo duży.

477. Niech ruch ciała będzie opisany dwiema funkcjami $r(t)$ i $\alpha(t)$. Różniczkowanie prowadzi do wzorów na składowe prędkości i przyspieszenia

$$\vec{v} = [\dot r\cos\alpha - r\dot\alpha\sin\alpha, \dot r\sin\alpha + r\dot\alpha\cos\alpha, \dot\alpha d]$$
$$\vec{a} = [\ddot r\cos\alpha - 2\dot r\dot\alpha\sin\alpha - r\dot\alpha^2\cos\alpha - r\ddot\alpha\sin\alpha,$$
$$\ddot r\sin\alpha + 2\dot r\dot\alpha\cos\alpha - r\dot\alpha^2\sin\alpha + r\ddot\alpha\cos\alpha, \ddot\alpha d],$$

gdzie kropka oznacza pochodną po czasie. Zapiszmy jeszcze składowe wektora prostopadłego do powierzchni:

$$\vec{n} = [d\sin\alpha, -d\cos\alpha, r].$$

Warunek $\vec a \parallel \vec n$ pozwala wyprowadzić dwa prawa zachowania. Oczywista jest zasada zachowania energii, która tu oznacza stałą wartość $v^2 = \dot r^2 + (r^2+d^2)\dot\alpha^2$. Nieco bardziej pracochłonne (szczegóły pomijamy) jest wykazanie, że stałą wartość ma wyrażenie $K = (r^2+d^2)\dot\alpha$.

Po wyeliminowaniu $\dot\alpha$ otrzymujemy równanie

$$v^2 = \dot r^2 + \frac{K^2}{r^2+d^2}.$$

Z podstawienia $\dot r = 0$ wyznaczamy ekstremalną wartość r – łatwo wykazać, że jest to minimum:

$$r^2_{\min} = \frac{K^2}{v^2} - d^2.$$

Dana wartość kąta β bezpośrednio daje nam wielkość

$$\cos^2\beta = \frac{(\vec v_0\cdot\vec r_0)^2}{v_0^2 r_0^2} = \frac{\dot r_0^2}{\dot r_0^2 + (r_0^2+d^2)\dot\alpha_0^2},$$

a dalej można stąd wyznaczyć stosunek K^2/v^2.

Ostateczne rozwiązanie przedstawia wzór

$$r^2_{\min} = r_0^2\sin^2\beta - d^2\cos^2\beta.$$

Wynik ten ma sens, jeśli prawa strona równania jest większa od zera, a w przeciwnym przypadku nastąpi trafienie ciała w oś. Graniczna wartość kąta β jest dana równaniem $\operatorname{tg}\beta = d/r_0$.

Występowanie w zadaniu nietypowej wielkości zachowanej K, równej $J_z + dp_z$ (gdzie J_z i p_z są składowymi momentu pędu i pędu, przy jednostkowej masie), wynika z nietypowej śrubowej symetrii problemu. Ogólne sformułowanie tego związku jest znane jako twierdzenie Noether.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 470 ($WT = 2{,}35$) i 471 ($WT = 1{,}75$) z numeru 1/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	35,95
Andrzej Idzik	Bolesławiec	31,41
Krzysztof Magiera	Łosiów	29,23
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	27,04
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,27
Michał Koźlik	Gliwice	15,51

Klub 44

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2009

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

579. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których suma $1+2+\ldots+n$ jest dzielnikiem iloczynu $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

580. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(x+f(y+z))+f(y+f(z+x))+f(z+f(x+y))=0$$

dla $x,y,z\in\mathbb{R}$.

579. Badamy, kiedy $n!$ dzieli się przez $n(n+1)/2$; równoważnie – kiedy $2(n-1)!$ dzieli się przez $n+1$. Jasne, że ten warunek nie jest spełniony, gdy $n+1$ jest liczbą pierwszą nieparzystą. Pokażemy, że tylko wtedy.

Dla $n\leqslant 3$ sprawdzamy to bezpośrednio. Dalej przyjmujemy, że $n+1$ jest liczbą złożoną, większą od 4:

$$n+1=km>4;\qquad 2\leqslant k\leqslant m\leqslant (n+1)/2\leqslant n-1.$$

Gdy $k<m$, są to różne czynniki iloczynu $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)$, który wobec tego dzieli się przez $km=n+1$.

Gdy zaś $k=m$, wówczas także iloczyn ten dzieli się przez $km=k^2=n+1$, bowiem jego różnymi czynnikami są teraz k oraz $2k$. Trzeba jedynie uzasadnić, że $2k\leqslant n-1$. Otóż skoro $n+1>4$, to $k\geqslant 3$, a więc

$$2k=k^2+1-(k-1)^2\leqslant k^2+1-2^2=n-2.$$

580. Przyjmijmy, że funkcja ciągła f spełnia podane równanie. Podstawiamy w tym równaniu kolejno: $x=y=z$; następnie $x=y=-z$; wreszcie $z=0$ – i otrzymujemy zależności

(1) $$f(x+f(2x))=0,$$

(2) $$2f(x+f(0))+f(-x+f(2x))=0,$$

(3) $$f(x+f(y))+f(y+f(x))+f(f(x+y))=0.$$

Z (1) widać, że $f(f(0))=0$. Biorąc teraz w (1) $x=f(0)/2$, dostajemy $f(f(0)/2)=0$. Równanie (3) dla $x=y=f(0)/2$ daje zatem $f(f(f(0)))=0$. Skoro zaś $f(f(0))=0$, znaczy to, że $f(0)=0$.

Ponownie korzystamy z równania (3), przyjmując $y=0$, i otrzymujemy

(4) $$f(x)=-2f(f(x)).$$

Weźmy pod uwagę zbiór $D=\{x: f(x)=0\}$. Wykażemy, że

(5) jeśli $x,y\in D$, to $x+y\in D$;

(6) jeśli $x\in D$, to $-x\in D$;

(7) jeśli $x\in D$, to $x/2\in D$.

Dowód własności (5): dla $x,y\in D$ równanie (3) redukuje się do $f(f(x+y))=0$. Stąd, w myśl (4), $f(x+y)=0$.

Dowód własności (6): jeśli $x\in D$, to (wobec (5)) $2x\in D$. Wiedząc, że $f(0)=0$, wnosimy z równania (2), że $f(-x)=0$.

Dowód własności (7): zastępując w równaniu (1) x przez $x/2$ widzimy, że jeśli $f(x)=0$, to $f(x/2)=0$.

Z własności (5), (6), (7) wynika, przez proste wnioskowanie indukcyjne, że jeżeli w zbiorze D jest jakakolwiek liczba $d\neq 0$, to są w nim wszystkie liczby postaci $2^{-n}md$ (dla $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$). Tworzą one gęsty podzbiór $\mathbb{R}$. Funkcja f przyjmuje dla tych argumentów wartość 0. Jest ciągła – a więc jest tożsamościowo równa 0.

Pozostaje przypadek, gdy $D=\{0\}$. Wówczas równanie (1) daje wniosek, że $x+f(2x)=0$, czyli $f(x)=-x/2$ dla $x\in\mathbb{R}$.

Obie znalezione funkcje ($f(x)=0$, $f(x)=-x/2$) spełniają wyjściowe równanie, i są to jedyne jego ciągłe rozwiązania.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 571 ($WT=2{,}71$) i 572 ($WT=1{,}38$) z numeru 12/2008

Michał Kieza	Warszawa	46,13
Marcin Kasperski	Warszawa	43,88
Andrzej Idzik	Bolesławiec	43,15
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Tomasz Warszawski	Kraków	39,88
Krzysztof Dorobisz	Kraków	39,01
Paweł Najman	Jaworzno	35,68
Łukasz Garncarek	Opole	33,48

Michał Kieza zasilił szeregi Weteranów!

Rozwiązanie zadania F 746.
Średnie parcie jednej piłeczki na tłok wynosi

$$F_{\text{śr}}=\Delta p/\Delta t,$$

$$\Delta p=2mv=2m\sqrt{2g(H-h)},$$

gdzie H jest wysokością, na którą wyskoczy piłeczka po usunięciu tłoka. Pęd Δp jest przekazywany tłokowi w czasie $\Delta t=2\tau$, gdzie τ jest dane równaniem $h=v\tau+g\tau^2/2$.

Gdy tłok przykrywa piłeczki, ich parcie równoważy siłę ciężkości działającą na tłok:

$$Mg=nF_{\text{śr}}=\frac{nmg}{(1-h/H)^{-1/2}-1}.$$

Stąd

$$H=\frac{(nm+M)^2}{nm(nm+2M)}h.$$