Podzielność liczb w poziomych rzędach trójkąta Pascala*

Adam WYRZYKOWSKI

W tej pracy n-tym poziomym rzędem trójkąta Pascala będę nazywał zbiór liczb:

$$\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}\right\};$$

pojęcie to jest całkiem intuicyjne w obliczu graficznej interpretacji (rys. 1). Często będę też korzystał z pojęcia „skrajnych jedynek" w n-tym poziomym rzędzie, mając na myśli liczby $\binom{n}{0}$ oraz $\binom{n}{n}$, które są równe 1.

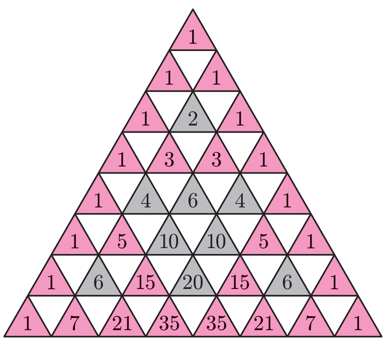
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \cdots\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$

Rys. 1

Pojawiają się pytania: Czy istnieją poziome rzędy, w których wszystkie liczby, pomijając skrajne jedynki, są podzielne przez daną liczbę pierwszą? Jeżeli tak, to jak znajdować takie rzędy? Czy istnieją poziome rzędy, w których wszystkie liczby (pomijając oczywiście skrajne jedynki) są podzielne przez daną liczbę złożoną? Kiedy wszystkie liczby w poziomym rzędzie są niepodzielne przez daną liczbę pierwszą? Odpowiedź na te pytania jest głównym celem mojej pracy.

Zauważmy, że nadając liczbom parzystym i liczbom nieparzystym w trójkącie Pascala różne kolory (rys. 2), otrzymujemy figurę przypominającą trójkąt Sierpińskiego. W moich rozważaniach nie będę analizować geometrycznych własności trójkąta Pascala, lecz wykorzystam samopodobieństwo trójkąta Pascala do postawienia kilku ciekawych hipotez czysto algebraicznych. Pierwszą z nich formułuje się następująco.



Rys. 2. Związek trójkąta Pascala z trójkątem Sierpińskiego.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1$, zachodzi*

$$\binom{2^m - 1}{k} \equiv 1 \pmod 2.$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Innymi słowy, wszystkie liczby postaci $\binom{2^m-1}{k}$ są nieparzyste. Istotnie, poziome rzędy o numerach $2^m - 1$ zawierają „podstawy" kolejnych trójkątów (w oparciu o samopodobieństwo), więc znajdują się w nich same liczby nieparzyste – stąd powyższa hipoteza.

W celu wykazania twierdzenia 1 wygodnie jest najpierw udowodnić

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych $m, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < 2^m$, zachodzi*

$$2 \,|\, \binom{2^m}{k}.$$

Tutaj istotne jest, że nierówność $0 < k < 2^m$ jest ostra, ponieważ liczba

$$\binom{2^m}{0} = \binom{2^m}{2^m} = 1$$

jest nieparzysta.

Na okładce przedstawiony jest rozkład w trójkącie Pascala liczb dających te same reszty z dzielenia przez 3: reszta 0 – kolor zielony, reszta 1 – czerwony, reszta 2 – niebieski.

Powyższe twierdzenie można uogólnić na przypadek dowolnej liczby pierwszej p, tzn. zachodzi

Twierdzenie 3. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, $m, k \in \mathbb{N}$ oraz $0 < k < p^m$, to ma miejsce podzielność*

$$p \,|\, \binom{p^m}{k}.$$

Zauważmy, że w interpretacji związanej z trójkątem Pascala twierdzenie 3 oznacza, że poziome rzędy o numerach będących potęgami liczby pierwszej p, pomijając skrajne jedynki, zawierają wyłącznie liczby podzielne przez p.

W dowodzie wielu twierdzeń zawartych w mojej pracy korzystam z funkcji $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ zdefiniowanej następująco: $S(n, p) = \max(k \in \mathbb{N}_0 : p^k \,|\, n)$. Na przykład $S(10, 2) = 1$, ponieważ $2 \,|\, 10$, ale 4 nie jest dzielnikiem 10. Także $S(16!, 2) = 15$ oraz $S(18, 5) = 0$, etc. Zauważmy, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to wartość $S(n, p)$ jest równa wykładnikowi stojącemu przy liczbie p w rozkładzie n na czynniki pierwsze.

*Skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, Częstochowa 2008 r.

W książce *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, w ramach dowodu twierdzenia Czebyszewa, Wacław Sierpiński podaje wzór na wykładnik przy liczbie pierwszej p w rozkładzie $n!$ na czynniki pierwsze:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor, \tag{1}$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą („podłogę") x, tzn. jedyną liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Będę korzystał również ze znanej nierówności

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor, \tag{2}$$

prawdziwej dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Dowód twierdzenia 3. Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ takich, że $b \mid a$, zachodzi oczywiście:

$$S\left(\frac{a}{b}, p\right) = S(a, p) - S(b, p). \tag{3}$$

Tezę twierdzenia można przepisać równoważnie jako:

$$S\left(\binom{p^m}{k}, p\right) > 0.$$

Po zastosowaniu do powyższego (3) i definicji symbolu Newtona mamy

$$S((p^m)!, p) > S(k!, p) + S((p^m - k)!, p).$$

Uwzględniając (1) w tej nierówności, dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor > \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że dla $i > m$ jest

$$\left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor = 0,$$

dlatego wystarczy wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor > \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor.$$

Na mocy (2) zachodzi nierówność

$$\left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor.$$

Przeprowadzając sumowanie stronami nierówności takich jak powyższa dla ustalonych p, m, k oraz i przebiegającego zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$, dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor \geqslant \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor.$$

W celu wykazania tezy wystarczy więc już tylko dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor \neq \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor. \tag{4}$$

Załóżmy nie wprost, że zachodzi równość. Wiadomo, że jeżeli w wyniku dodawania stronami nierówności nieostrych otrzymujemy równość, to równość musi być też spełniona w każdej z dodawanych nierówności. Zatem równość w (4) zachodzi, gdy:

$$\left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor \quad \text{dla dowolnego } i \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Jednak dla $i = m$ lewa strona równania

$$\left\lfloor \frac{p^m}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^m - k}{p^i} \right\rfloor$$

wynosi 1, a w obliczu nierówności $0 < k < p^m$ prawa strona tego równania jest równa 0. Sprzeczność dowodzi prawdziwości (4). To kończy dowód twierdzenia 3.

Podstawiając $p = 2$, otrzymujemy tezę twierdzenia 2.

Rozwiązanie zadania M 1246.
Niech

$$S(n) = \{n + 2, n + 3, \ldots, n + 1001\}.$$

Zauważmy, że jeśli zbiór $S(n)$ zawiera dokładnie k liczb pierwszych, to zbiór $S(n+1)$ zawiera $k-1$, k lub $k+1$ liczb pierwszych. Ponadto zbiór $S(0)$ zawiera więcej niż pięć liczb pierwszych, a zbiór $S(1001!)$ nie zawiera żadnej liczby pierwszej. Wobec tego dla pewnej liczby $0 < m < 1001!$ zbiór $S(m)$ zawiera dokładnie pięć liczb pierwszych.

Prawdziwe okazuje się też twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3, mówiące, że jeżeli wszystkie liczby (pomijając skrajne jedynki) w poziomym n-tym rzędzie trójkąta Pascala są podzielne przez liczbę pierwszą p, to n jest potęgą o wykładniku całkowitym dodatnim liczby p.

Okazuje się, że odpowiedź na postawione na wstępie pytanie dotyczące liczb złożonych jest negatywna.

Twierdzenie 4. *Jeżeli r jest liczbą złożoną, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, że liczba $\binom{n}{k}$ jest niepodzielna przez r.*

Tak więc nie istnieje w trójkącie Pascala taki rząd poziomy, że (pomijając skrajne jedynki) wszystkie liczby w nim występujące są podzielne przez liczbę złożoną r.

Twierdzenie 1 daje się uogólnić na wszystkie liczby pierwsze, tzn. prawdą jest, że wszystkie liczby postaci $\binom{p^m-1}{k}$ są niepodzielne przez p. Co więcej, zachodzą twierdzenia mocniejsze.

Twierdzenie 5.1. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, $m \in \mathbb{N}$, k zaś jest liczbą parzystą spełniającą warunek $0 \leqslant k \leqslant p^m - 1$, to*

$$\binom{p^m-1}{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, $m \in \mathbb{N}$, k zaś jest liczbą nieparzystą spełniającą warunek $1 \leqslant k \leqslant p^m - 1$, to*

$$\binom{p^m-1}{k} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Dowód twierdzenia 5.1 przebiega przez indukcję i wykorzystuje wzór Pascala oraz twierdzenie 3. Twierdzenie 5.2 jest natomiast prostą konsekwencją twierdzeń 3 i 5.1.

Dla $p > 2$ okazuje się, że nie tylko rzędy o numerach $p^m - 1$ zawierają wyłącznie liczby niepodzielne przez p (rysunek na okładce).

Twierdzenie 6. *Wszystkie liczby*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

są niepodzielne przez liczbę pierwszą p wtedy i tylko wtedy, *gdy dla pewnych liczb m, t, spełniających warunki: $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $0 < t < p$, zachodzi*

$$n = tp^m - 1 \quad \textit{albo} \quad n < p.$$

Jednym z ciekawszych twierdzeń związanych z trójkątem Pascala, z którym się spotkałem, jest związek trójkąta Pascala z liczbami Fibonacciego, który prowadzi ostatecznie do formuły:

$$(n+1) \text{ wyraz ciągu Fibonacciego} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}.$$

Zainteresowanego tym związkiem Czytelnika odsyłam na stronę Politechniki Gdańskiej

`www.mif.pg.gda.pl/kmd/topp/Seminarium2.pdf`.

Zachęcam Czytelnika do odnalezienia dowodów twierdzeń zawartych w tej pracy, które byłyby oparte jedynie na samopodobieństwie trójkąta Pascala.

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 13 i A 14 czekamy do 1 sierpnia 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs *Delty*".

A 13. Kosmonauta na powierzchni Ziemi może skoczyć w miejscu, do góry, na wysokość 70 cm. Jak wysoko skoczy ten sam kosmonauta na Księżycu, jeżeli wiadomo, że pole grawitacyjne na Księżycu jest 6 razy słabsze niż na Ziemi? [1 pkt]

A 14. Pokazać, dlaczego promieniowanie rentgenowskie nie dociera do powierzchni Ziemi. W tym celu należy wyznaczyć tak zwaną głębokość optyczną atmosfery, τ, która określa czynnik osłabienia przechodzącego promieniowania. Wielkość ta jest równa

$$\tau = n \cdot H \cdot \sigma,$$

gdzie n jest średnią gęstością liczbową cząstek w atmosferze, H jest grubością atmosfery, a σ jest przekrojem czynnym na rozpraszanie fotonu. Przekrój czynny σ dla fotonów rentgenowskich jest w przybliżeniu równy 10^{-24} cm^2. Brakujące wielkości należy wziąć z tablic. [2 pkt]

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

A 9. Jasność wyrażamy wzorem $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, stąd stosunek jasności brązowego karła do jasności Słońca wynosi $L/L_\odot = (R/R_\odot)^2 (T/T_\odot)^4$. Po podstawieniu odpowiednich wielkości liczbowych otrzymujemy $L/L_\odot \approx 3{,}497 \cdot 10^{-5}$.

A 10. Moc promieniowania wynosi $P = E/t$, stąd $t = E/P$. Wykorzystując warunki zadania, otrzymujemy $t = 0{,}13 \cdot (N/4) \cdot E_r/P$, gdzie $E_r = 27\,\text{MeV}$ jest energią wydzieloną w pojedynczej reakcji syntezy 4 jąder wodoru w jądro helu, $N = M_w/m_H$ (M_w to masa wodoru w gwieździe, a m_H masa jądra wodoru) jest liczbą jąder wodoru. Podstawiając wielkości liczbowe, otrzymujemy

$$t = 3{,}095 \cdot 10^{17}\,\text{s} = 9{,}8\,\text{mld lat},$$

a porównując z wiekiem Słońca dostajemy $t/t_\odot = 2{,}18$.