Niezmienniki na szachownicach

Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach, olimpijskich i nie tylko, występują szachownice. Często coś się na nich dzieje i należy wykazać, że jest (lub nie jest) możliwy określony rezultat. Przydatna wówczas bywa *metoda niezmienników*, polegająca na znalezieniu pewnego parametru, który się nie zmienia (lub zmienia się w sposób kontrolowany i wtedy nazywamy go *półniezmiennikiem*).

Następujące zadanie z LIII Olimpiady Matematycznej uchodziło za jedno z trudniejszych.

1. Dana jest szachownica 2000×2000. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole). Rozstrzygnij, czy można, wykonując takie ruchy, przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

R. Opisane ruchy nie zmieniają położenia środka ciężkości przemieszczanych dwóch kamieni, więc także całego układu. Początkowo środek ciężkości znajduje się na środku szachownicy, we wspólnym wierzchołku czterech pól. Zatem wszystkie kamienie nie mogą nigdy znaleźć się na jednym polu, bo wtedy środek ciężkości byłby w środku tego pola. □

W przykładzie 2. niezmiennikiem jest pewna zmiana.

2. Na narożnym polu szachownicy 8×8 stoi wieża. Wykaż, że nie może ona przejść do przeciwległego rogu, odwiedzając każde pole dokładnie raz (wieża *odwiedza* każde pole, które mija na swej drodze).

R. W pojedynczym ruchu o k pól wieża odwiedza je wszystkie, k razy zmieniając pole na sąsiednie, innego koloru. Odwiedzając każde pole dokładnie raz, wykonuje 63 takie zmiany. Tymczasem przeciwległe rogi są tego samego koloru, więc aby przejść od jednego do drugiego, musiałaby wykonać parzystą liczbę zmian. □

W zadaniu 3. szachownicę warto samemu wprowadzić.

3. Trzeba przesunąć ciężki fotel o kwadratowej podstawie. Można go obracać wokół dowolnego rogu o $90°$. Czy da się ustawić go obok poprzedniego miejsca, tak by zwrócony był w tę samą stronę?

R. Nie. Niech podłoga będzie szachownicą i fotel początkowo stoi na czarnym polu, zwrócony w kierunku N. Po pojedynczym obrocie zajmuje białe pole, ustawiony prostopadle do N. Po kolejnym trafia na czarne pole, zwrócony równolegle do N itd. Pola obok początkowego są białe, więc stoi na nich zawsze prostopadle do N. □

Kolejne zadania to przykłady półniezmienników.

4. Na szachownicy $n \times n$ szerzy się epidemia. Początkowo choruje k pól. Jeżeli co najmniej dwóch z czterech sąsiadów zdrowego pola jest chorych, to ono również się zaraża. Znajdź takie najmniejsze k, że zarażona może zostać cała szachownica.

R. Nietrudno sprawdzić, że n chorych pól na przekątnej zarazi całą szachownicę. Stąd $k \leqslant n$. Półniezmiennikiem jest obwód chorego obszaru — nie zwiększa się on (sprawdzenie kilku możliwości zarażania pojedynczego pola pozostawiam Czytelnikowi). Zatem aby końcowy obwód był równy $4n$, początkowy musi być co najmniej taki. Każde zarażone pole zwiększa obwód chorego obszaru o co najwyżej 4, czyli pierwotnie musi być zarażonych co najmniej n pól. Stąd $k \geqslant n$, co razem z $k \leqslant n$ daje $k = n$. □

5. W tablicę o wymiarach $n \times n$ wpisano n^2 liczb rzeczywistych. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb stojących w pewnej kolumnie lub wierszu.
(a) Udowodnij, że wykonując tylko takie ruchy, można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne.
(b) Czy zawsze da się, po pewnej liczbie kroków, otrzymać tablicę zawierającą same liczby nieujemne?

Wskazówki. (a) Zmień znaki liczb w wierszu lub kolumnie o ujemnej sumie. Jak zmieni się suma wszystkich liczb w tablicy? Czy może rosnąć nieograniczenie?
(b) Rozważ tablicę $\left[\begin{smallmatrix}-1 & +1\\ -1 & -1\end{smallmatrix}\right]$.

Poniższe zadanie z LVIII Olimpiady Matematycznej nie sprawi teraz, mam nadzieję, większych problemów.

6. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Dla każdego $n \geqslant 2$ rozstrzygnij, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.
Rozwiązanie znaleźć można na stronie `www.om.edu.pl`.

Na koniec trudne zadanie dla ambitnych.

7*. Pola nieskończonej szachownicy ponumerowano parami liczb całkowitych, tak jak w układzie współrzędnych. Na każdym polu o pierwszej współrzędnej ujemnej stoi pionek. Wykonujemy następujące ruchy: jeśli na pierwszym i drugim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie stoi pionek, a trzecie jest puste, to możemy usunąć oba te pionki i postawić pionek na trzecim polu. Wykaż, że żaden pionek nigdy nie dotrze na żadne z pól o pierwszej współrzędnej równej 4.