Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2009

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

474. Za pomocą soczewki skupiającej wytworzono obraz pozorny trzykrotnie powiększony. Nie zmieniając położenia przedmiotu, przesuwano ekran po drugiej stronie soczewki i zaobserwowano bardzo słaby obraz rzeczywisty dwukrotnie zmniejszony. Jak powstał ten obraz? Ile wynosi współczynnik załamania szkła soczewki? Grubość soczewki jest mała w porównaniu z odległością przedmiotu i obrazów.

475. Płaska warstwa o grubości d i stałej dielektrycznej równej 1 zawiera jednorodnie rozmieszczony ładunek dodatni o gęstości objętościowej ϱ i styka się z drugą warstwą o identycznych parametrach, ale zawierającą ładunek ujemny. Obliczyć różnicę potencjałów między zewnętrznymi powierzchniami warstw.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 468 ($WT = 1{,}04$) i 469 ($WT = 2{,}54$) z numeru 12/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	46,28
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,95
Andrzej Idzik	Bolesławiec	31,41
Krzysztof Magiera	Łosiów	29,23
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	27,04
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,27

Drugą rundę zamknął p. Jerzy Witkowski.

474. Zaobserwowany słaby obraz mógł powstać wskutek dwukrotnego odbicia światła od powierzchni soczewki (od wewnątrz). Dla tych promieni soczewka charakteryzuje się zdolnością skupiającą Z będącą sumą zwykłej zdolności skupiającej

$$Z_0 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

zdolności skupiającej pierwszego zwierciadła $Z_1 = 2/R_1$ oraz zdolności skupiającej drugiego zwierciadła $Z_2 = 2/R_2$:

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 = (n+1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Dla obrazu pozornego równanie soczewkowe przybiera postać

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = Z_0,$$

gdzie x jest odległością przedmiotu od soczewki, natomiast dla obrazu rzeczywistego (słabego) mamy

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = Z.$$

Zatem stosunek Z_0/Z ma wartość 2/9; z drugiej strony jest on równy, jak wykazaliśmy wyżej, ilorazowi $(n-1)/(n+1)$. Stąd obliczamy

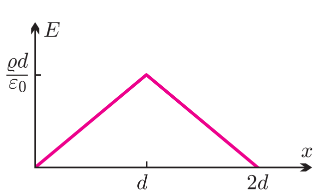
$$n = 11/7 = 1{,}571.$$

475. Z prawa Gaussa nietrudno wyprowadzić, że natężenie pola elektrycznego pojedynczej warstwy jest równe zeru w jej środku, na zewnątrz niej jest takie, jak dla warstwy nieskończenie cienkiej:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\varrho d}{2\varepsilon_0},$$

a wewnątrz zmienia się liniowo. Całkowite natężenie pola E jest sumą odpowiednich wyrażeń dla obu warstw, z uwzględnieniem zwrotu pól. Zależność E od współrzędnej x wzdłuż osi prostopadłej do warstw charakteryzuje się przebiegiem „trójkątnym" (rysunek), przy czym maksymalna wartość E jest równa $\frac{\varrho d}{\varepsilon_0}$. Szukaną różnicę potencjałów znajdujemy jako pole pod wykresem, czyli

$$\Delta V = \frac{\varrho d^2}{\varepsilon_0}.$$



Klub 44

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2009

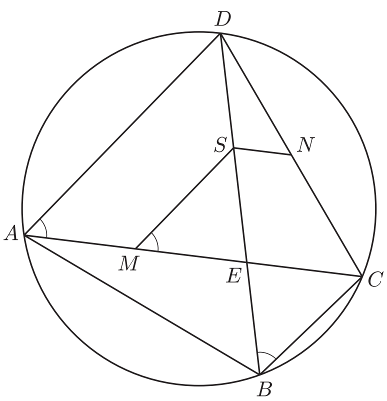
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

577. Dwusieczna kąta ABC trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie E oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AE i CD. Dowieść, że punkty M, B, C, N leżą na jednym okręgu.

578. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazach

$$a_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$



577. Punkt D jest środkiem łuku CA okręgu opisanego na trójkącie ABC; zatem $|AD| = |CD|$.

Niech S będzie środkiem odcinka DE. Punkt M połowi odcinek AE, więc prosta SM jest równoległa do AD oraz

$$|SM| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|CD| = |CN|.$$

Skoro N jest środkiem odcinka CD, prosta SN jest równoległa do AC.

Stąd wynika, że czworokąt $MCNS$ jest trapezem równoramiennym – ma więc okrąg opisany. Wystarczy teraz wykazać, że punkt B leży na tym okręgu. To zaś wynika z równości kątów

$$|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CMS|.$$

578. Ciąg (a_n) jest rosnący. Pokażemy, że jest on ograniczony z góry liczbą 3.

Ustalmy $n \geqslant 2$. Spójrzmy na wzór definiujący liczbę a_n. Usuwając z tego napisu kolejne symbole, tworzymy ciąg skończony $(b_1, \ldots, b_n)$ o wyrazach

$$(1) \qquad b_1 = a_n, \qquad b_k = \frac{b_{k-1}^2 - 1}{k} \qquad \text{dla } k = 2, \ldots, n.$$

Widać z określenia a_n, że $b_k > 1$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ oraz $b_n = 1$. Gdyby zachodziła nierówność $a_n \geqslant 3$, czyli $b_1 \geqslant 3$, to ze wzoru (1) otrzymalibyśmy przez łatwą indukcję $b_k \geqslant k+2$ dla $k = 1, \ldots, n$, wbrew temu, że $b_n = 1$.

Zatem istotnie $a_n < 3$ dla wszystkich n. Ciąg rosnący (a_n) jest więc zbieżny do granicy $\lambda \leqslant 3$. Wykażemy, że $\lambda = 3$.

Określamy ciąg nieskończony (c_n) wzorem analogicznym do (1):

$$(2) \qquad c_1 = \lambda, \qquad c_n = \frac{c_{n-1}^2 - 1}{n} \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Ponownie ustalmy $n \geqslant 2$ i zdefiniujmy ciąg $(b_1, \ldots, b_n)$ wzorem (1).

Skoro $b_1 = a_n < \lambda = c_1$, to $b_k < c_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. W szczególności $c_n > b_n = 1$. Wobec dowolności n znaczy to, że wszystkie wyrazy ciągu (c_n) są liczbami większymi od 1.

Przypuśćmy, że $\lambda < 3$, czyli $c_1 < 3$. Znów łatwa indukcja pokazuje, że

$$c_n < n+2 \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Możemy więc napisać $c_n = (n+2)x_n$, gdzie $0 < x_n < 1$. Podstawiamy to do wzoru (2) i przekształcamy prawą stronę:

$$(n+2)x_n = \frac{(n+1)^2 x_{n-1}^2 - 1}{n} = \\ = (n+2)x_{n-1}^2 - \frac{1 - x_{n-1}^2}{n} < (n+2)x_{n-1}^2.$$

Stąd $x_n < x_{n-1}^2$. Wobec tego $x_2 < x_1^2$, $x_3 < x_1^4$ i ogólnie $x_n < x_1^{2^{n-1}} \leqslant x_1^n$. Tak więc $c_n \leqslant (n+2)x_1^n$. To jest jednak niemożliwe, gdy $0 < x_1 < 1$, a wszystkie $c_n > 1$. Sprzeczność wynikła z przypuszczenia, że $\lambda < 3$.

Odpowiedź: $\lim a_n = 3$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 569 ($WT = 2{,}43$) i 570 ($WT = 1{,}43$) z numeru 11/2008

Andrzej Idzik	Bolesławiec	43,15
Michał Kieza	Warszawa	42,86
Marcin Kasperski	Warszawa	42,50
Zbigniew Galias	Kraków	39,34
Tomasz Warszawski	Kraków	38,50
Paweł Najman	Jaworzno	35,68
Krzysztof Dorobisz	Kraków	34,92
Łukasz Garncarek	Opole	33,48