Czy warto interesować się „gorszymi” spółkami, czyli ryzyko i wskaźnik Sharpe'a

*Mariusz BARYŁO**

Wyobraźmy sobie, że mamy do zainwestowania pewną sumę pieniędzy i chcielibyśmy kupić na giełdzie trochę akcji. Liczymy oczywiście na wzrost ich wartości (zakładam tu, że Czytelnik nie należy do grona bardziej wyrafinowanych inwestorów, liczących przekornie na spadek wartości akcji, czyli stosujących dziwną technikę tzw. *krótkiej sprzedaży* – to byłby materiał na osobną opowieść...). Ponieważ jednak nie mamy pojęcia, co przyniesie przyszłość, nasze przewidywania możemy opierać jedynie na wiedzy o tym, jak się te akcje zachowywały w przeszłości. Nic prostszego zatem! Patrzymy, która akcja w przeszłości wykazywała średnio największe zyski, i ją nabywamy! No dobrze, skoro jest to tak oczywiste, po co w takim razie o tym pisać? Cóż, Czytelnik, który zapoznał się np. z artykułem z *Delty* 9/2008, wie już, że w rozważnym inwestowaniu nie można patrzeć wyłącznie na zyski, jakie możemy osiągnąć, ale wypada brać również pod uwagę ryzyko, jakie się wiąże z możliwymi stratami. Przeanalizujmy dokładniej problem inwestycji w akcje dwóch spółek A i B. Załóżmy, że odnaleźliśmy notowania tych spółek w przeciągu ostatnich dwóch miesięcy i na ich podstawie obliczyliśmy 7 tygodniowych stóp zwrotu. Otrzymaliśmy następujące dane:

Nie musi być wcale tak, że akcja STALE zwiększała swoje notowania – mogła czasami tracić na wartości, ale i tak średnio być najlepszą ze wszystkich.

W praktyce należałoby wziąć pod uwagę dłuższy okres historyczny – wówczas wyniki można traktować jako bardziej wiarygodne.

A	0,25	−0,25	0,35	0,55	0,25	0,35	0,25
B	−0,15	0,05	−0,25	−0,65	−0,15	0,35	0,45

Oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki A w wybranym przez nas okresie dwóch miesięcy wynosi więc $\overline{R}_A = 0{,}25$ (jest to średnia arytmetyczna liczb z pierwszego wiersza powyższej tabeli), a dla spółki B jest to wielkość $\overline{R}_B = -0{,}05$. Ryzyka zaś (rozumiane jako odchylenia standardowe stopy zwrotu) wyznaczamy z formuły

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7-1}\cdot\sum_{t=1}^{7}(R_t-\overline{R})^2}$$

i wynoszą one: $\sigma_A = \sqrt{0{,}06} \approx 0{,}2449$, $\sigma_B = \sqrt{0{,}14} \approx 0{,}3741$.

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych n stóp zwrotu, wynoszących kolejno $R_1, R_2, \ldots, R_n$, to oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji w daną akcję w tym okresie liczymy ze wzoru $\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$. Odchylenie standardowe stóp zwrotu szacujemy na ogół ze wzoru $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{t=1}^{n}(R_t-\overline{R})^2}$, gdzie $\overline{R}$ jest wyznaczoną wcześniej oczekiwaną stopą zwrotu.

Jakie wnioski nasuwają się Czytelnikowi po obejrzeniu tych wyników? Oczywiście wybór akcji spółki A, jako zdecydowanie lepszej! Wykazuje ona dużą historyczną stopę zwrotu (25%), podczas gdy akcje spółki B zachowywały się fatalnie – przynosiły niemal ciągłe straty, dając ostatecznie stopę zwrotu −5%! Co więcej, spółka A może pochwalić się wahaniami (24,49%) zdecydowanie mniejszymi, niż wahania i tak kiepskiej spółki B (37,41%). Nie ma więc żadnej wątpliwości, jaką decyzję należy podjąć i nonsensem wydaje się branie pod uwagę „słabej” spółki!

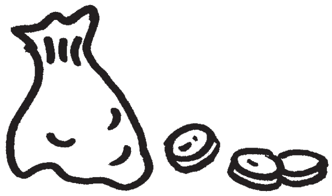
Czy rzeczywiście? Czy B naprawdę nic nam nie może zaoferować? Za chwilę przekonamy się, że nie jest to wcale takie oczywiste...

Wyobraźmy sobie, że coś nas jednak podkusiło, żeby w naszej inwestycji uwzględnić również spółkę B. Oczywiście, nie chcemy zrezygnować ze świetnej spółki A, zatem postanawiamy nabyć akcje obydwu tych spółek. Inwestorzy nazywają taką sytuację zakupem *portfela akcji*. Nasz portfel (można by nazwać go wręcz portfelikiem) będzie malutki, bo tylko dwuelementowy. (Być może kiedyś, dysponując większym zasobem gotówki oraz wiedzy, pokusimy się o zakup portfeli dużo większych!) Spróbujmy opisać go w ścisły sposób. Okazuje się, że wystarczy do tego płaszczyzna kartezjańska $\mathbb{R}^2$. Nasz portfel to punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, gdzie x_1 oraz x_2 będą częściami naszego kapitału, zainwestowanymi w akcje spółki A oraz B odpowiednio. Widzimy, że $x_1 + x_2 = 1$. (Z jakim założeniem wiąże się ta równość?) Ponadto sensowne portfele muszą mieć współrzędne nieujemne (najmniejszą ilością akcji, które możemy kupić, jest zero). Zauważmy, że wszystkie portfele o tych własnościach tworzą na płaszczyźnie odcinek, będący fragmentem prostej o równaniu $x_2 = 1 - x_1$ zawartym między punktami $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Tak więc jeżeli rozważamy zakup

Tak naprawdę w życiu nie mamy wcale do wyboru nieskończonej liczby portfeli – pomyślmy choćby o tym, co by było, gdybyśmy chcieli zainwestować $\frac{\pi}{4}$ naszych pieniędzy w akcje jednej spółki i $1-\frac{\pi}{4}$ w akcje drugiej...

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

akcji dwóch spółek, to możemy wybierać spośród nieskończenie wielu portfeli z tego odcinka – nazywa się go *zbiorem portfeli dopuszczalnych*. Na przykład jeżeli mamy do dyspozycji 1000 zł i postanowiliśmy nabyć akcje spółki A za 850 zł oraz akcje spółki B za 150 zł, nasz portfel ma postać $(0{,}85; 0{,}15)$. Ściślej rzecz ujmując, jeżeli posiadamy na początku kwotę C_p i zakupimy za $x_1 \cdot C_p$ akcje spółki A, za $x_2 \cdot C_p$ zaś akcje spółki B, to kapitał końcowy wynosić będzie $C_k = C_p \cdot x_1 \cdot (1 + R_1) + C_p \cdot x_2 \cdot (1 + R_2)$, gdzie R_1 oraz R_2 to stopy zwrotu akcji spółek A i B. Przez stopę zwrotu z portfela (x_1, x_2) rozumiemy stosunek zysku inwestora posiadającego dany portfel do kwoty zainwestowanej w ten portfel na początku, jest to więc wielkość



$$\frac{C_k - C_p}{C_p} = \frac{C_p \cdot x_1 \cdot (1 + R_1) + C_p \cdot x_2 \cdot (1 + R_2) - C_p}{C_p} = x_1 \cdot R_1 + x_2 \cdot R_2.$$

Widzimy stąd więc, że stopa zwrotu z portfela może być również rozumiana jako średnia ważona stóp zwrotu poszczególnych akcji, przy czym wagami są udziały tych akcji w portfelu. Opis ten często jest przyjmowany za definicję stopy zwrotu z portfela.

Dostajemy zatem ostatecznie formułę, opisującą **stopę zwrotu z portfela** $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$\overline{R}_{\mathbf{x}} = \overline{R}_1 \cdot x_1 + \overline{R}_2 \cdot x_2.$$

Zachęcam teraz Czytelnika do wykonania nieco bardziej pracochłonnego rachunku i wyprowadzenia formuły opisującej wariancję stopy zwrotu z portfela (x_1, x_2). Należy zacząć od napisania wzoru (por. uwaga na marginesie poprzedniej strony) $\sigma^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n} (R_t - \overline{R}_{\mathbf{x}})^2$, gdzie $\overline{R}_{\mathbf{x}}$ jest w tym przypadku oczekiwaną stopą zwrotu z portfela, $R_1, \ldots, R_n$ zaś są oczekiwanymi stopami zwrotu z portfela w kolejnych przedziałach czasu. Po chwili rachunków powinniśmy dostać formułę

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma_{1,1} \cdot x_1^2 + 2\sigma_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \sigma_{2,2} \cdot x_2^2,$$

gdzie $\sigma_{i,j}$ jest kowariancją stóp zwrotu walorów i-tego i j-tego (dla $i = j$ jest to po prostu wariancja stopy zwrotu z i-tego waloru), którą wyznacza się ze wzoru $\sigma_{i,j} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (R_{i,t} - \overline{R}_i) \cdot (R_{j,t} - \overline{R}_j)$, przy czym $R_{i,t}$ oznacza stopę zwrotu i-tego waloru w podokresie historycznym o numerze t $(t = 1, \ldots, n)$, zaś $\overline{R}_i$ jest średnią historyczną stopą zwrotu z i-tego waloru, wyznaczaną ze wzoru $\overline{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_{i,t}$. Dla naszych danych (polecam samodzielne wykonanie rachunków!) otrzymujemy wyniki: $\sigma_{1,1} = 0{,}06$, $\sigma_{1,2} = -0{,}035$, $\sigma_{2,2} = 0{,}14$. Zatem dla wszystkich dopuszczalnych portfeli $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ wariancje ich stopy zwrotu opisane są wzorem

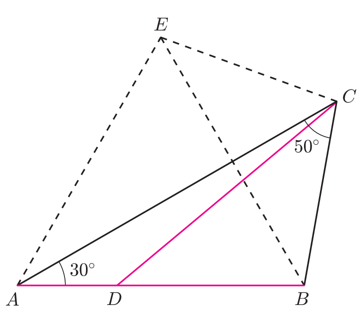
$$\sigma^2(\mathbf{x}) = 0{,}06x_1^2 - 0{,}07x_1 \cdot x_2 + 0{,}14x_2^2.$$

Jeżeli zauważymy teraz, że w naszej sytuacji $x_2 = 1 - x_1$, to nasz wzór uprości się do postaci

$$\sigma^2(x_1) = 0{,}27x_1^2 - 0{,}35x_1 + 0{,}14,$$

gdzie x_1 może być dowolną liczbą z przedziału $[0, 1]$. Widzimy więc, że w ten sposób uzyskaliśmy prosty przepis, jak możemy manipulować ryzykiem naszego portfela poprzez odpowiedni dobór jego składników (czyli zakup akcji w stosownej proporcji). Powyższa funkcja przyjmuje swoje minimum (globalne) w punkcie $x_1 = \frac{35}{54} \approx 0{,}648$ i wynosi ono $\sigma^2\left(\frac{35}{54}\right) = \frac{287}{10800} \approx 0{,}027$. Zatem gdybyśmy za około 65% posiadanych pieniędzy nabyli akcje spółki A, pozostałe zaś 35% przeznaczyli na zakup (kiepskich!) akcji spółki B, ryzyko naszego portfela (mierzone odchyleniem standardowym jego stopy zwrotu) byłoby najmniejsze z możliwych i wyniosłoby $\sqrt{\frac{287}{10800}}$, czyli około 16,30%! Jest to o wiele mniej, niż 24,49% dla akcji spółki A, czy 37,41% dla akcji spółki B. Niech nam się jednak nie wydaje, że dokonaliśmy jakiegoś cudu – owszem, za pomocą „kiepskich” akcji udało się znacznie zmniejszyć ryzyko, jednak kosztem stopy zwrotu! Obliczmy oczekiwaną stopę zwrotu z takiego portfela: $\overline{R}_{\mathbf{x}} = 25\% \cdot \frac{35}{54} - 5\% \cdot \frac{19}{54} \approx 14{,}44\%$. Jest to, niestety, mniej niż 25% możliwe do uzyskania z inwestycji wyłącznie w „lepsze” akcje. Znowu więc powraca pytanie, co wybrać: wyższy zwrot, ale i wyższe ryzyko, czy też zwrot niższy, ale przy niższym poziomie ryzyka? Narzędziem, pomagającym w tego rodzaju dylematach, jest tzw. wskaźnik Sharpe'a. Jest on zdefiniowany jako stosunek tzw. premii za ryzyko (mierzonej różnicą między stopą zwrotu z inwestycji w portfel akcji a stopą zwrotu pozbawioną ryzyka $\overline{R}_0$ – związaną z nabywaniem bonów skarbowych, obligacji, itp., czyli papierów wartościowych, z których

Rozwiązanie zadania M 1247.
Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej AC:



Wówczas $\sphericalangle BAE = 60^\circ$ oraz $AB = AE$, skąd wynika, że trójkąt ABE jest równoboczny.

Ponadto $BD = BC = CE$ oraz $\sphericalangle ECB = 100^\circ = \sphericalangle CBD$, a zatem trójkąty ECB i CBD są przystające (cecha bok-kąt-bok). Wobec tego $CD = EB = AB$, co należało wykazać.

Można więc powiedzieć, że współczynnik Sharpe'a jest to względna premia za podjęcia ryzyka inwestycji w akcje.

mamy zagwarantowany konkretny dochód) do ryzyka (mierzonego odchyleniem stopy zwrotu portfela) – formalnie

$$S_{\mathbf{x}} = \frac{\overline{R}_{\mathbf{x}} - \overline{R}_0}{\sigma(\mathbf{x})}.$$

Zauważmy, że gdyby ryzyka portfeli były takie same, to większy współczynnik Sharpe'a oznaczałby większą stopę zwrotu. I podobnie, gdyby stopy zwrotu portfeli były równe, większy współczynnik Sharpe'a oznaczałby mniejsze ryzyko. Widzimy więc, że inwestorzy powinni wybierać portfele mające możliwie największy wskaźnik Sharpe'a! Przyjmijmy, że obecnie $\overline{R}_0 = 5\%$. Dla inwestycji w akcje spółki A wskaźnik Sharpe'a wynosi

$$\frac{0{,}25 - 0{,}05}{\sqrt{0{,}06}} \approx 0{,}816.$$

Dla naszego portfela o minimalnym ryzyku mamy zaś

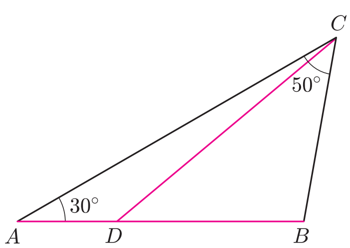
$$S_{\mathbf{x}} = \frac{0{,}1444 - 0{,}05}{\sqrt{0{,}163}} \approx 0{,}234.$$

Jest to więc wynik zdecydowanie słabszy. Pozostaje jednak pytanie: czy jeżeli chcielibyśmy znaleźć portfel, dla którego współczynnik Sharpe'a przyjmie wartość największą z możliwych, to czy właściwą odpowiedzią będzie ten złożony tylko z akcji „najlepszej" spółki? Otóż niekoniecznie! Często istnieje portfel „lepszy" i od portfela dającego najwyższą stopę zwrotu, i od portfela o minimalnym ryzyku. Portfel taki ma stopę zwrotu znajdującą się pomiędzy stopami zwrotu powyższych dwóch portfeli i nazywa się go portfelem optymalnym względem stopy zwrotu pozbawionej ryzyka. Okazuje się, że u nas jest to $\mathbf{x}_{\mathrm{op}} = \left(\frac{49}{51}, \frac{2}{51}\right)$ i rzeczywiście jego wskaźnik Sharpe'a (Czytelnik zechce sprawdzić!) wynosi około 0,818, a więc jest on istotnie odrobinę lepszy niż portfel zawierający akcje wyłącznie „najlepszej" spółki! Jak jednak otrzymać taki wynik, to już temat na kolejną opowieść. A może Czytelnicy spróbują sami wymyśleć, jak taki portfel znaleźć? Na przykład, używając tylko szkolnej geometrii analitycznej!

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1246. Rozstrzygnąć, czy istnieje 1000 kolejnych liczb naturalnych, wśród których znajduje się dokładnie pięć liczb pierwszych.
Rozwiązanie na str. 2



M 1247. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle C = 50°$ (rysunek). Punkt D leży na boku AB, przy czym $BD = BC$. Wykazać, że $CD = AB$.
Rozwiązanie na str. 9

M 1248. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia warunek: jeśli $m - n$ jest liczbą pierwszą, to $f(m) \neq f(n)$. Czy zbiór wartości funkcji f może być skończony? Jeśli tak, to wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę jego elementów.
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 743. W kolbie znajduje się woda w temperaturze 0°C. Po wypompowaniu powietrza cała woda zamarzła wskutek własnego parowania (przy braku dopływu ciepła z zewnątrz). Jaka część wody wyparowała? Ciepło parowania wody w temperaturze 0 °C wynosi $r = 2{,}5 \cdot 10^6$ J/kg, ciepło topnienia lodu w tej samej temperaturze to $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ J/kg.
Rozwiązanie na str. 7

F 744. Mamy rurkę kapilarną z kanałem w kształcie stożka ściętego, przy czym średnice tego stożka są równe $d_1 = 1$ mm oraz $d_2 = 2$ mm, a długość całej rurki jest równa 10 cm. Na jaką wysokość podniesie się woda w rurce, jeśli zanurzyć ją w wodzie szerszym końcem na niedużą głębokość? Współczynnik napięcia powierzchniowego wody wynosi $\alpha = 0,07$ N/m.
Rozwiązanie na str. 5