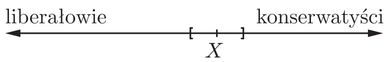
Wokół twierdzenia Helly'ego

*Arkadiusz MĘCEL**

*W moim pojęciu osoba zgodna...
to taka, która zgadza się ze mną!*
– Benjamin Disraeli

Kiedy możliwe jest porozumienie? Jak decyzja grupy ludzi zależy od indywidualnych preferencji? W określonych warunkach odpowiedzi na te pytania dostarczyć może klasyczny już dziś rezultat teorii zbiorów wypukłych, należący do austriackiego matematyka z przełomu XIX i XX wieku – Eduarda Helly'ego.

Każdy ma swoje „idealne" preferencje. W imię koniecznego kompromisu jesteśmy jednak zdolni do zaakceptowania opcji dostatecznie „bliskich" naszym oczekiwaniom. Klasyczną sytuacją jest tu uproszczony model głosowania z jednowymiarowym spektrum, w którym konserwatystów umieszczamy po prawej stronie osi, liberałów zaś po lewej (tak, jak na rysunku obok). Każdy punkt naszego modelu oznacza pewien możliwy wybór. Każdemu wyborcy X przyporządkowujemy przedział I_X akceptowalnych przez niego kandydatów. Załóżmy, że na karcie wyborczej wolno mu zaznaczyć cały przedział I_X. Przy jakich warunkach możemy określić, kiedy społeczeństwo „zgodzi" się na określonego kandydata?



W podobny sposób wybierają swoje władze matematycy w USA...

Odpowiedzi na postawione wyżej pytania mogą być dość zaskakujące. Okazuje się, że jeśli każdych dwóch wyborców skłonnych będzie zaakceptować pewną kandydaturę, to wybrana zostanie osoba akceptowana przez całe społeczeństwo! Wydaje się to nieprawdopodobne, ale – jeśli wysłowimy tę obserwację w języku matematyki stojącej za tym modelem – dostaniemy całkiem intuicyjny fakt.

A na jakie poparcie może liczyć potencjalny zwycięzca, jeśli spośród każdych trzech wyborców tylko dwóm udaje się wypracować wspólne stanowisko?

Twierdzenie 1. *Dana jest rodzina $\mathcal{I}$ przedziałów domkniętych w $\mathbb{R}$, przy czym $|\mathcal{I}| > 1$. Jeśli dla każdych $I, J \in \mathcal{I}$ zachodzi warunek $I \cap J \neq \emptyset$, to przecięcie wszystkich elementów rodziny $\mathcal{I}$ jest niepuste.*

Podaliśmy w ten sposób najprostszy możliwy, bo jednowymiarowy, przypadek twierdzenia Helly'ego. Aby go udowodnić, nie potrzeba żadnej skomplikowanej technologii. Przedstawiona wyżej interpretacja społeczna jest naturalnie jedną z wielu możliwych. Czytelnik zachęcony powyższym przykładem będzie w stanie wskazać wiele innych „z życia wziętych" sytuacji, do których ten fakt idealnie pasuje. Można też za pomocą twierdzenia Helly'ego rozwiązywać nietrywialne zadania geometryczne.

Zadanie 1. *Na płaszczyźnie położona jest dowolna skończona rodzina wielokątów $\mathcal{F}$ (niekoniecznie wypukłych) o tej własności, że każde dwa jej elementy mają punkt wspólny. Wykaż, że dla dowolnego punktu P na płaszczyźnie istnieje okrąg o środku w P, mający punkt wspólny z każdym wielokątem z $\mathcal{F}$.*

Rozwiązanie. Wybieramy P i ustalamy dowolną półprostą l przechodzącą przez ten punkt. Rozważamy przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to l$ zadane w następujący sposób: każdy okrąg O_r o środku w P i promieniu $r \geqslant 0$ przeprowadzamy na punkt $O_r \cap l$. Nietrudno zauważyć, że każdy z wielokątów należących do $\mathcal{F}$ przejdzie na pewien odcinek domknięty na prostej l. Z założenia mamy $f(W_1) \cap f(W_2) \neq \emptyset$, gdzie $W_1, W_2 \in \mathcal{F}$. Na mocy twierdzenia Helly'ego przecięcie wszystkich odcinków postaci $f(W)$, $W \in \mathcal{F}$, jest niepuste. Wiadomo już zatem, jaki okrąg wybrać, prawda?

Czy przez dowolny punkt P można przeprowadzić pewną prostą przecinającą każdy wielokąt z $\mathcal{F}$?

Wróćmy jeszcze na moment do interpretacji społecznych. Czasami do podjęcia decyzji potrzeba więcej niż jednej informacji. Na przykład: nasz idealny kandydat powinien nie tylko być „po właściwej stronie". Chcemy też wiedzieć, czy jest raczej pacyfistą, czy może pragnie wojen? Czy zamierza dużo podróżować, czy raczej nie? W naszym modelu dodajemy więc kolejne osie – spektrum wyboru staje się przestrzenią wymiaru 2, 3, a czasem i większego. Wyborca X ma w nim już nie przedział, ale n-wymiarowy zbiór I_X akceptowalnych przez siebie opcji. Okazuje się, że im więcej wymiarów, tym bardziej zgodnego społeczeństwa potrzebujemy. Przy jednym parametrze jedynie każdych dwóch wyborców musiało się zgadzać. Przy dwóch parametrach potrzeba, by kompromis osiągało każdych trzech. W trójwymiarowym modelu zgodni muszą być dowolni czterej, itd. Samo to nie wystarcza jeszcze do jednomyślnego rozstrzygnięcia. Trzeba coś założyć o zbiorach I_X. I tu możliwości jest wiele. Każda z nich to pewna odmiana twierdzenia Helly'ego. Najbardziej klasycznym założeniem jest wypukłość.

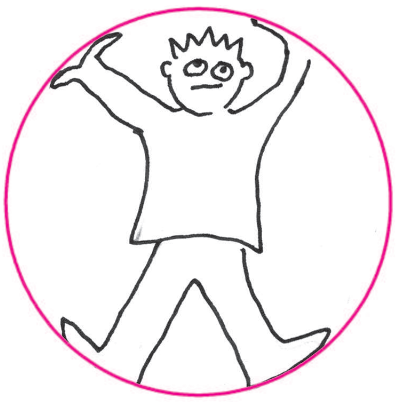
Serwis randkowy *eHarmony* używa przestrzeni wymiaru 29...

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie 2 (Helly, 1913). *Dana jest skończona rodzina $\mathcal{I}$ zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$, przy czym $|\mathcal{I}| > n$. Jeśli każde $n+1$ z nich ma niepuste przecięcie, to przecięcie wszystkich elementów rodziny $\mathcal{I}$ jest niepuste.*

Twierdzenie to ukazuje swoistą sztywność zbiorów wypukłych. Jako ilustrację tego poglądu proponujemy następujące zadanie.

Czytelników zainspirowanych tym zadaniem zachęcamy, by zastanowić się, jakie jest najmniejsze możliwe koło potrzebne do przykrycia dowolnych n punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ położonych na płaszczyźnie w ten sposób, że $|A_iA_j| \leqslant 1$, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$.



Zadanie 2. *Na płaszczyźnie leży n punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, przy czym $n \geqslant 3$. Dla każdych trzech punktów z tego zbioru istnieje koło o promieniu 1, które je zawiera. Udowodnij, że wszystkie te punkty leżą w pewnym kole o promieniu 1.*

Rozwiązanie. Niech k_1, k_2, k_3 będą kołami o środkach w punktach A_1, A_2, A_3 i promieniach równych 1. Zgodnie z założeniem istnieje takie koło k o promieniu 1 i środku a, że $A_1, A_2, A_3 \in k$ (równoważnie: $a \in k_1 \cap k_2 \cap k_3 \neq \emptyset$). Zatem rodzina kół $\{k_i\}_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}}$ o środkach w A_i i promieniu 1 spełnia założenia twierdzenia Helly'ego w przypadku dwuwymiarowym. Istotnie, jest to rodzina zbiorów wypukłych, w której każde trzy elementy mają niepuste przecięcie. Istnieje więc punkt wspólny wszystkich kół z tej rodziny. Łatwo zauważyć, że jego odległość od każdego z punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ równa jest co najwyżej 1.

Istnieją też interesujące zadania dla trójwymiarowej wersji twierdzenia Helly'ego. Jako proste ćwiczenie zostawiamy następujące.

Zadanie 3. *W przestrzeni trójwymiarowej dana jest pewna liczba (co najmniej 4) półprzestrzeni (trójwymiarowy analog półprostej na prostej i półpłaszczyzny na płaszczyźnie). Półprzestrzenie te wypełniają w sumie całą przestrzeń. Wykazać, że tak naprawdę już pewne cztery z nich wypełniają całą przestrzeń.*

Kiedy już poradzimy sobie z tą zagadką, czeka na nas nieoczekiwanie trudne zadanie, zaproponowane niegdyś na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną.

Zadanie 4. *Na sferze S o promieniu 1 (w $\mathbb{R}^3$) umieszczono pewną krzywą zamkniętą γ. Wiadomo, że każde koło wielkie tej sfery ma z tą krzywą niepuste przecięcie. Wykazać, że długość γ wynosi co najmniej 2π.*

Co w tym zadaniu robi tytułowe twierdzenie? Wskazówka: spróbować wykazać, że jeśli cztery punkty należące do γ leżą w pewnej półsferze S' sfery S, to cała krzywa γ leży w S'. Później jest już „z górki".

Twierdzenie Helly'ego było pierwszym rezultatem tzw. dyskretnej geometrii kombinatorycznej. Typowe zagadnienia tej dziedziny związane są, między innymi, z kolorowaniem obiektów geometrycznych, z najlepszymi pokryciami, upakowaniami lub wypełnieniami, z podziałami i rozkładami figur, z ich symetriami. Choć znakomita większość problemów do niej należących da się wysłowić w sposób całkowicie elementarny, ich dowody nie zawsze należą do łatwych.

Na koniec kilka zdań o problemach otwartych... Geometria kombinatoryczna ma wspólne korzenie z wieloma słynnymi problemami i wynikami, m.in. z drugim problemem Hilberta, lematem Spernera, czy hipotezami Keplera oraz Borsuka. Obok nich jest też mnóstwo „irytująco prostych" problemów otwartych – ostatnie zadanie z zamieszczonych obok jest właśnie jednym z nich. Być może któryś z Czytelników znajdzie rozwiązanie?

Na płaszczyźnie mamy 5 punktów. Żadne 3 nie są współliniowe. Można z nich wybrać 4 będące wierzchołkami czworokąta wypukłego.

***

Na płaszczyźnie mamy 6 punktów. Żadne 3 nie są współliniowe. Można utworzyć 2 rozłączne trójkąty o wierzchołkach w tych punktach.

***

Na płaszczyźnie mamy 7 punktów. Istnieją takie punkty A, B (niekoniecznie spośród danych 7), że jeśli pewien zbiór wypukły X zawiera przynajmniej 4 z wybranych 7 punktów, to X zawiera też A lub B.

***

Na płaszczyźnie mamy 8 punktów. Żadne 3 nie są współliniowe. Czy można zawsze utworzyć dwa trójkąty o wierzchołkach wybranych spośród tych punktów tak, by odcinek łączący pozostałe dwa punkty przechodził przez ich wnętrza?

Średnią odległość $\langle r\rangle$ planety od Słońca można obliczyć np. jako średnią (niech już będzie: arytmetyczną) wielu pomiarów r wykonanych w jednakowych odstępach czasu t w ciągu pełnego obiegu planety. Ale można też uśrednić pomiary r wykonane w jednakowych odstępach kąta v między kierunkiem r a kierunkiem na peryhelium (kąt ten nazywa się anomalią prawdziwą). A jeżeli obliczyć średnią arytmetyczną po prostu najmniejszej i największej odległości planety od Słońca, to co wyjdzie? A ile wynosi średnia geometryczna tych dwu odległości? A ich średnia harmoniczna? Okazuje się, że (prawie) wszystkie te średnie są różne.

Oto one (a oznacza wielką półoś elipsy, e jej mimośród):

$$\langle r\rangle_t = a(1+e^2/2), \qquad \langle r\rangle_v = a\sqrt{1-e^2} = b,$$

$$\frac{r_{\min}+r_{\max}}{2} = a, \qquad \sqrt{r_{\min}r_{\max}} = b,$$

$$\left(\frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}}\right)^{-1} = \frac{a}{2}(1-e^2) = \frac{p}{2},$$

gdzie p to tzw. parametr elipsy. Można skonstruować kąt (zwany anomalią mimośrodową), względem którego uśrednione r wynosi a.

T. K.