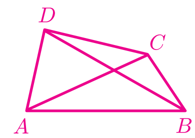
# Twierdzenie Ptolemeusza

*Joanna JASZUŃSKA*

**Twierdzenie Ptolemeusza (TP).** *Dla dowolnego czworokąta $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.*

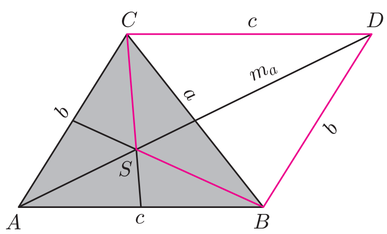



Dowód pozostawmy jako ćwiczenie. Poniżej kilka przykładów zastosowań.

Dwa różne dowody TP znaleźć można na przykład w *Delcie* 1(248)/1995.

**1.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta równobocznego $ABC$. Udowodnij, że z odcinków o długościach $AP, BP, CP$ można zbudować trójkąt.

**R.** Na mocy TP dla czworokąta wklęsłego $ABCP$ mamy ostrą nierówność $AB \cdot CP + AP \cdot BC > AC \cdot BP$. Dzieląc stronami przez $AB = BC = AC$, uzyskujemy nierówność trójkąta $CP + AP > BP$. □




Rys. 1. $ABDC$ to równoległobok.

**2.** W trójkącie o bokach $a, b, c$ długości odpowiadających im środkowych z $A, B, C$ oznaczmy przez $m_a, m_b, m_c$. Udowodnij, że $m_b c + m_c b \geqslant 2m_a a$.

**R.** Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Z TP dla czworokąta $SBDC$ mamy $SB \cdot DC + SC \cdot BD \geqslant SD \cdot BC$, czyli $\frac{2}{3}m_b c + \frac{2}{3}m_c b \geqslant \frac{4}{3}m_a a$, co daje tezę. □

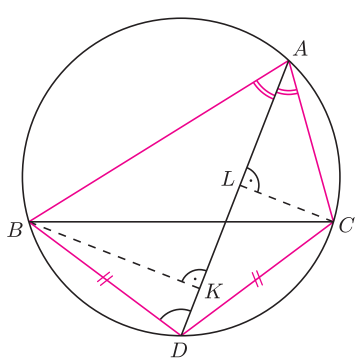
Zadanie 3 pochodzi z LI Olimpiady Matematycznej.

**3.** Dwusieczna kąta $BAC$ trójkąta $ABC$ przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie $D$ różnym od $A$. Punkty $K$ i $L$ są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów $B$ i $C$ na prostą $AD$. Udowodnij, że $AD \geqslant BK + CL$.

**R.** Skoro $AD$ jest dwusieczną, to $BD = CD$ (rys. 2). Stąd i z twierdzenia sinusów $BK/CD = BK/BD = \sin\sphericalangle ADB = AB/2R$, analogicznie $CL/BD = AC/2R$. Zatem, z TP oraz z $BC \leqslant 2R$, mamy

$$BK + CL = \frac{AB \cdot CD + AC \cdot BD}{2R} = \frac{AD \cdot BC}{2R} \leqslant AD. \ \square$$

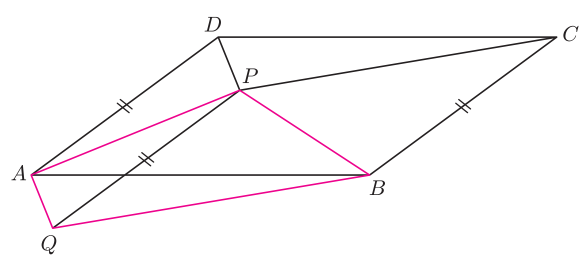
**Twierdzenie sinusów.** *Jeśli trójkąt o kącie $\alpha$ i przeciwległym boku $a$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R$, to $a/\sin\alpha = 2R$.*




Rys. 2

**4.** Punkt $P$ leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$ o polu $S$. Wykaż, że wówczas $AP \cdot CP + BP \cdot DP \geqslant S$.

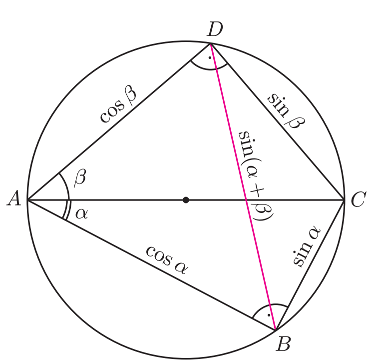
**R.** Obierzmy punkt $Q$ tak, by $AQPD$ był równoległobokiem (rys. 3). Wtedy $BCPQ$ też jest równoległobokiem. Z TP dla czworokąta $AQBP$ mamy $AP \cdot BQ + BP \cdot AQ \geqslant AB \cdot PQ$, co na mocy $BQ = CP$, $AQ = DP$, $PQ = AD$ oraz $AB \cdot AD \geqslant S$ daje tezę. Kiedy zachodzi równość? □




Rys. 3

**5.** Wykaż, że $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

**R.** Niech czworokąt $ABCD$ będzie wpisany w okrąg o średnicy $AC = 1$, niech $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle CAD = \beta$ (rys. 4). Wtedy $AB = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$, $AD = \cos\beta$, $CD = \sin\beta$ i z twierdzenia sinusów $BD = \sin(\alpha + \beta)$. Teza wynika z TP dla $ABCD$. □




Rys. 4

---

Zadania domowe:

**6.** Niech punkt $P$ leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym $ABC$, na tym łuku $BC$, który nie zawiera $A$. Wykaż, że $BP + CP = AP$.

**7.** Wyprowadź twierdzenie Pitagorasa jako wniosek z TP.

**8.** Punkty $P, Q, R$ leżą odpowiednio na odcinkach $AB, AC, AD$ równoległoboku $ABCD$. Udowodnij, że jeżeli na czworokącie $APQR$ można opisać okrąg, to $AR \cdot AD + AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.
*Wskazówka.* Wykaż najpierw, że $\triangle ABC \sim \triangle RQP$.