Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 567 ($WT = 1{,}21$) i 568 ($WT = 2{,}13$) z numeru 10/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	46,02
Adam Woryna	Ruda Śląska	45,65
Marcin Kasperski	Warszawa	42,50
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,53
Zbigniew Galias	Kraków	39,34
Michał Kieza	Warszawa	39,24
Tomasz Warszawski	Kraków	37,07
Łukasz Garncarek	Opole	33,48

Mamy wreszcie znów dwa przekroczenia „bariery 44”:
Jerzy Witkowski – już po raz piąty;
Adam Woryna – po raz drugi.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 583, 584

Redaguje Marcin E. KUCZMA

583. Rozważamy wielomian
$$P(x) = (1 + x^{43} + x^{44} + x^{45})^{44} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{1980}x^{1980}.$$
Obliczyć sumę $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{1980}$ tych współczynników, których numery dzielą się przez 3.

584. Dla liczb dodatnich a, b, c przyjmijmy
$$U = a^2b + b^2c + c^2a, \qquad V = ab^2 + bc^2 + ca^2,$$
$$A = a^3 + abc, \qquad B = b^3 + abc, \qquad C = c^3 + abc.$$
Udowodnić, że $\sqrt{UV} \geqslant abc + \sqrt[3]{ABC}$.

Zadanie 584 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2009

Przypominamy treść zadań:

575. Rozważamy alfabet złożony z n liter, a w nim słowa o następującej własności: między dwoma wystąpieniami którejkolwiek litery, każda litera pojawia się co najwyżej jeden raz (tzn. zabronione są podciągi $x \ldots y \ldots y \ldots x$, również dla $y = x$). Ile jest takich słów o maksymalnej długości?

576. Dowieść, że dla liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leqslant \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}.$$

575. Jest jasne, że największa długość dopuszczalnego słowa wynosi $3n$ (żadna litera nie może wystąpić więcej niż 3 razy; a słowo $aaabbb\ldots$ długości $3n$ jest dobre). Niech $F(n)$ będzie szukaną liczbą dopuszczalnych słów długości $3n$ (z alfabetu n-literowego); w każdym z nich każda litera musi wystąpić trzykrotnie.

Zauważmy, że każde takie słowo musi się zaczynać dwiema jednakowymi literami; gdyby bowiem na początku było zestawienie ab (gdzie $a \neq b$), to każde dalsze umieszczenie dwóch liter a oraz dwóch liter b da sprzeczność z nałożonym warunkiem.

Weźmy dowolne słowo dopuszczalne długości $3n$; przyjmijmy, że zaczyna się ono sekwencją aa. Usuńmy wszystkie trzy wystąpienia litery a. Pozostanie słowo dopuszczalne długości $3(n-1)$, które w myśl poprzedniego spostrzeżenia musi zaczynać się sekwencją bb. Przywracamy trzy litery a na ich miejscach – dwie na początku i pozostałą gdzieś dalej. Jej miejsce nie może jednak wypaść po drugim wystąpieniu b. Musi albo poprzedzić oba początkowe wystąpienia litery b, albo je rozdzielić.

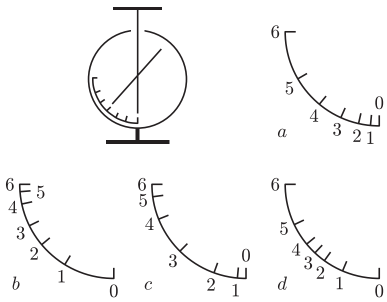
Każda z tych dwóch opcji – dołączenie do dopuszczalnego słowa długości $3(n-1)$ trzech egzemplarzy nowej litery a, tworzące początek $aaabb$ lub $aabab$ – daje dopuszczalne słowo długości $3n$.

Ponieważ w roli nowej litery może się znaleźć każda z n liter alfabetu, wynika stąd wzór rekurencyjny $F(n) = 2nF(n-1)$. W połączeniu z wartością bazową $F(1) = 1$ daje to wzór jawny $F(n) = 2^{n-1}n!$.

576. Bez straty ogólności można przyjąć, że $a \geqslant b \geqslant c$ lub $a \leqslant b \leqslant c$; wówczas prawa strona zadanej nierówności ma wartość $\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$. Potraktujmy liczby $a, c \geqslant 0$ jako ustalone, zaś b – jako zmienną, przebiegającą przedział o końcach a, c. Należy wykazać, że wartość maksymalna funkcji
$$b \mapsto \frac{a+b+c}{3} - (abc)^{1/3}$$
nie przekracza $\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$. Jest to funkcja wypukła, więc swoją wartość maksymalną przyjmuje na końcu przedziału, czyli dla $b = a$ lub $b = c$. Trzeba zatem dowieść, że każda z tych brzegowych wartości jest niewiększa od $\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$. Z uwagi na symetrię przypadków wystarczy zająć się wartością osiąganą dla $b = a$, czyli wykazać, że
$$\frac{2a+c}{3} - (a^2c)^{1/3} \leqslant \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2.$$
Można założyć, że $a > 0$ i przyjąć $c = at$ ($t \geqslant 0$), co redukuje ostatnią nierówność (po podzieleniu stronami przez a) do następującej,
$$\frac{2+t}{3} - t^{1/3} \leqslant \left(\sqrt{t}-1\right)^2.$$
Podstawienie $t = v^6$ ($v \geqslant 0$) i przeniesienie wszystkiego na jedną stronę sprowadza nierówność do postaci wielomianowej
$$2v^6 - 6v^3 + 3v^2 + 1 \geqslant 0.$$
Rozkład na czynniki
$$(v-1)^2(2v^4 + 4v^3 + 6v^2 + 2v + 1) \geqslant 0$$
kończy dowód.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2009



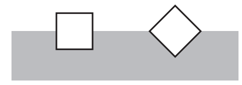
Rys. 2

Zadania z fizyki nr 480, 481

Redaguje Jerzy B. BROJAN

480. Powierzchnia długiego walca o promieniu r jest przewodząca. Po tej powierzchni wzdłuż osi walca płynie prąd o natężeniu I, o gęstości stałej wzdłuż obwodu walca. Jakie ciśnienie p powstaje wewnątrz walca wskutek wzajemnego przyciągania się elementów powierzchni? Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1.

481. Długi jednorodny pręt o przekroju kwadratowym, wykonany z materiału o gęstości 0,5 g/cm^3, leży na powierzchni wody. Która z przedstawionych na rysunku 1 pozycji jest położeniem równowagi trwałej, czy też obie?



Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 2/2009

Przypominamy treść zadań:

472. Elektroskop wycechowano zaopatrując go w skalę, na której zaznaczono kolejne wartości ładunku (w dowolnych jednostkach). Czy działki skali powinny być równo odległe, czy też nierówno (rys. 2*a*–*d*)? Wskazać skalę najbliższą prawidłowej i uzasadnić odpowiedź.

473. W chwili początkowej drobiny pyłu były nieruchome i rozmieszczone w sposób jednorodny, tworząc kulę (gwiazdę?). Jeśli jedyną siłą działającą na pyłki jest wzajemne przyciąganie grawitacyjne, to czy w czasie zapadania się kula pozostanie jednorodna? Jeśli nie, to czy gęstość będzie większa w środku kuli, czy przy jej powierzchni?

Jaka jest odpowiedź na te same pytania w odniesieniu do chmury pyłu o kształcie długiego walca? Uzasadnić wszystkie odpowiedzi.

472. Siła odpychania ze strony pręta działa na poszczególne części listka w kierunku zbliżonym do poziomego, a jej wartość – zgodnie z prawem Coulomba – jest proporcjonalna do iloczynu odpowiednich ładunków, czyli w ostatecznym rozrachunku do kwadratu ładunku elektroskopu q. Moment siły odchylającej listek od pionu zależy więc od q i kąta odchylenia φ według przybliżonego wzoru

$$M \sim q^2 \cos\varphi.$$

Ten moment siły jest równoważony przez moment siły ciężkości, który jest niezależny od ładunku i proporcjonalny do $\sin\varphi$. Wnioskiem jest zależność

$$\operatorname{tg}\varphi \sim q^2.$$

Tak więc, skala elektroskopu musi się zagęszczać przy zbliżeniu do zera (ze względu na kwadrat ładunku), a także przy zbliżeniu do kąta 90° (ze względu na przebieg funkcji tangens). Spośród narysowanych skal najlepsza jest skala c, jednak i ją należałoby poprawić, gdyż kąt 90° nie może być osiągnięty dla żadnej skończonej wartości q.

Nieścisłość przedstawionego rozumowania wynika zarówno z niedokładnie poziomego kierunku sił działających na listek, jak i stąd, że przy zmianie kąta φ zmienia się także rozkład ładunku na pręcie i listku. Nie powinno to jednak powodować radykalnej zmiany skali.

473. Przyjmijmy na początek założenie, że w czasie spadania pyłki się nie mijają (dalej upewnimy się co do jego słuszności). Wtedy każdy z pyłków porusza się tak, jakby źródłem pola grawitacyjnego była stała masa punktowa M równa łącznej masie pyłków położonych bliżej środka kuli, niż dany pyłek. (Zewnętrzne pyłki tworzą warstwę kulistą, która wewnątrz niej nie wytwarza pola grawitacyjnego.)

Z zasady zachowania energii wynika równanie

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)},$$

gdzie r – odległość danego pyłka od środka kuli, R – odległość początkowa. Po wprowadzeniu zmiennej $\varrho = r/R$ równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{R^3}}\sqrt{\frac{1}{\varrho} - 1}.$$

Równanie to można rozwiązać analitycznie, ale do naszych celów wystarczy spostrzeżenie, że przy stałej początkowej gęstości kuli masa M jest proporcjonalna do R^3, zatem stała po prawej stronie jest jednakowa dla wszystkich pyłków i otrzymana z równania funkcja $\varrho(t)$ także jest jednakowa. Oznacza to, że kula zmniejsza się w jednakowym stosunku, czyli pozostaje jednorodna. Oczywiście, wyprzedzanie pyłków wewnętrznych przez zewnętrzne jest wykluczone.

W przypadku długiego walca zależności siły grawitacji i energii potencjalnej od odległości od osi są mniej standardowe (choć wyprowadzone w wielu podręcznikach), więc zapiszmy odpowiednie wzory

$$F = \frac{2\mathrm{G}\lambda m}{r}, \qquad E_{\text{pot}} = 2\mathrm{G}\lambda m \ln(r),$$

gdzie λ jest masą walca na jednostkę długości, m – masą ciała próbnego (pyłka). Równanie ruchu ma postać

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{4\mathrm{G}\lambda \ln(R/r)},$$

a w zmiennej ϱ zdefiniowanej jak poprzednio

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{4\mathrm{G}\lambda}{R^2}}\sqrt{-\ln(\varrho)}.$$

Ponieważ dla walca początkowo jednorodnego λ jest proporcjonalne do R^2, więc poprzednie wnioski pozostają w mocy – walec pozostanie jednorodny.