mała delta

Czy komputer potrafi rozwiązywać równania?

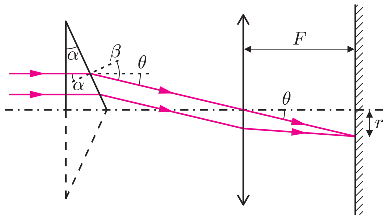
Wojtek źle spał w nocy, rozmyślając o trudnościach obliczeń numerycznych, w których nie sposób skorzystać z dokładnej wartości wielu kluczowych w matematyce i jej zastosowaniach stałych: ani z liczby π, ani z $4/3$, ani nawet 1,1. Przecież to, na przykład, znaczy, że $\sin(\pi)$ obliczony np. w języku C albo w programie obliczeń numerycznych Octave lub MATLAB będzie jedynie *w przybliżeniu* równy zeru. W konsekwencji wiele innych podstawowych tożsamości matematycznych będzie spełnionych tylko w przybliżeniu. Zakochanemu w pięknie logicznego rygoryzmu matematycznych twierdzeń Wojtkowi było bardzo trudno z tym się pogodzić.

Pisaliśmy o tym w *Delcie* 3/2009.

Następnego ranka, nieco zaspany, przeczytał w Internecie, że remedium na bolączki obliczeń numerycznych może być zastosowanie komputerowych *pakietów obliczeń symbolicznych*, takich jak np. Mathematica, Maple, czy MuPAD. Przez zastosowanie niezbędnych sztuczek programistycznych (których ceną jest zmniejszona szybkość rachunków) programy te liczą tak jak człowiek: „znają" ułamki i „wiedzą", jakie własności ma liczba π. Szybko więc zainstalował na swoim komputerze darmowy program Maxima, pozwalający prowadzić rachunki symboliczne.

Rzeczywiście, program był bardzo przyjemny w użyciu. Humor zaraz mu się poprawił, gdy sprawdził, że w Maximie $(4/3-1)\cdot 3-1$ jest równe *dokładnie* zeru, podobnie zresztą jak $\sin(\pi)$. Z dużą satysfakcją zauważył także, przeglądając komendy programu, że może teraz bez najmniejszego trudu wyznaczyć choćby 2009 cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\pi = 3{,}1415\ldots$. (Na prośbę Redakcji *Delty* nie przytaczamy pozostałych 2004 cyfr rozwinięcia.)

Rozwiązanie zadania F 742.
Obraz na ekranie będzie w kształcie koła o promieniu $r = F\,\mathrm{tg}\,\theta \approx F\theta$ (rysunek),



gdzie $\theta = \beta - \alpha$. Z prawa załamania $\sin\alpha/\sin\beta = 1/n$, zatem $\beta \approx n\alpha$ oraz $\theta \approx \alpha(n-1)$ i stąd

$$r = F\alpha(n-1).$$

Starszy brat także dał się porwać komputerowym eksperymentom i nawet podczas wykładów obmyślał, czym mogliby zaskoczyć Maximę lub Mathematikę – jednak nie było to takie łatwe. Aż wieczorem pewnego dżdżystego dnia zakomunikował triumfalnie Wojtkowi:

– Spróbuj rozwiązać równanie $(10x+2)^{2009} = (2x+4)^{2009}$! Na liście dyskusyjnej przeczytałem, że ponoć wszystkie programy symboliczne zaliczają się na nim na śmierć!

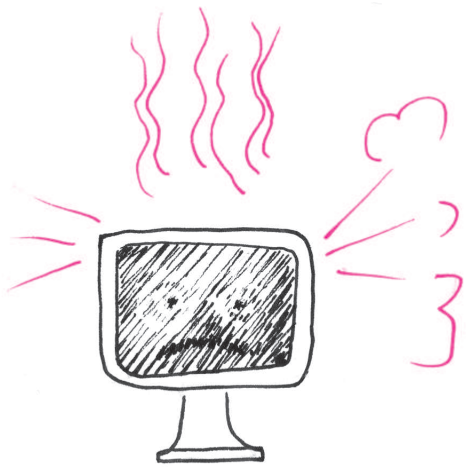
W jego głosie czuło się lekką ekscytację, gdy dzielił się z Wojtkiem swoimi doświadczeniami.

– Faktycznie, nawet Mathematica ma z nim kłopoty – ale czekaj, opowiem Ci od początku. Najpierw sprawdziłem równanie niższego stopnia,

$$(10x+2)^2 = (2x+4)^2,$$

zwykłe równanie kwadratowe. Wpisałem więc w Mathematice

```
Solve[(10x + 2)^2 == (2x + 4)^2, x]
```



... i jak myślisz, co się stało?

– Na pewno Mathematica rozwiązała je bez trudu? – domyślił się Wojtek.

– Yhm, natychmiast. Co gorsza – wstyd się przyznać! – zrobiła to lepiej ode mnie... Bo ja, licząc wynik w pamięci, zapomniałem, że po spierwiastkowaniu stronami dostaje się równanie z modułami,

$$|10x + 2| = |2x + 4|,$$

które ma przecież *dwa* rozwiązania!...

Tu Wojtek nie mógł powstrzymać się od upajającego uśmiechu politowania: właśnie *o tym* uczyli się teraz w liceum!

– Skoro tak – brat ciągnął dalej, starając się nie zauważać reakcji Wojtka, – to spróbowałem zrobić ten przykład z Internetu, to znaczy:

$$(10x + 2)^{2009} = (2x + 4)^{2009}.$$

Widzisz, Młody, to równanie jest *prostsze* od kwadratowego, bo nie wymaga modułów! Po prostu porównujesz wyrażenia w nawiasach:

$$(10x + 2)^{2009} = (2x + 4)^{2009} \iff 10x + 2 = 2x + 4$$

i rozwiązujesz wszystko w pamięci....

Wojtek już otwierał usta, by podać wynik, ale brat zaskoczył go finałem opowieści:

– Czekaj, słuchaj, bo to jest najlepsze! Wpisałem to równanie do Mathematiki, zaznaczając dla ułatwienia, że tym razem szukamy tylko pierwiastków rzeczywistych:

```
Reduce[(10 x + 2)^2009 == (2 x + 4)^2009, x, Reals]
```

a ona zaczęła liczyć, liczyć i liczyć... Rozwiązywała to równanie przez godzinę (dłużej nie mogłem czekać) – i wciąż się nie doliczyła!

Mimo satysfakcji, że wydał się sobie mądrzejszy od starszego brata, Wojtek był załamany konkluzją opowieści. Komputerowy program rachunków symbolicznych okazał się najwyraźniej jedynie szybkim i tępym rachmistrzem, niedostrzegającym jakichkolwiek relacji pomiędzy elementami równania. Zapewne droga postępowania była tak prosta jak posterunkowego na służbie: „Co my tu mamy, hmmm, do rozwiązania?” „Aha, równanie wielomianowe bardzo wysokiego stopnia...” „Taaak, umiem rozwiązywać niektóre takie równania, ale tylko postaci $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, a tu są *jakieś* dwumiany w *jakichś* potęgach...” „No dobra, to rozpiszmy wszystko podnosząc do potęgi, a potem – zredukujmy i zobaczmy, co się stanie!” – i właśnie w tym momencie komputer zaczął na początek pracowicie rozpisywać $(10x + 2)^{2009}$, a to, jak łatwo się domyślić, jest *baaaardzo poważnym* wyzwaniem... Procesor grzał się jak szalony, mijały kwadranse i nic poza tym się nie działo...

Po tych przemyśleniach już bez większych emocji bracia sprawdzili, że ich darmowa Maxima okazała się tak samo bezrefleksyjna, jak komercyjna Mathematica.

Małą Deltę przygotował Piotr KRZYŻANOWSKI

Rozwiązanie zadania M 1244. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje zbiór S_n złożony z n liczb całkowitych dodatnich o tej własności, że suma liczb dowolnego niepustego podzbioru zbioru S_n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Dla $n = 1$ przyjmijmy $S_1 = \{2\}$.

Załóżmy, że dla pewnego n suma liczb żadnego z podzbiorów zbioru S_n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Niech m będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że suma wszystkich liczb zbioru S_n jest mniejsza od $2m$. Ponadto niech $S_{n+1} = S_n \cup \{m^2 + 1\}$.

Jeśli w podzbiorze zbioru S_{n+1} nie ma liczby $m^2 + 1$, to zgodnie z założeniem indukcyjnym suma liczb tego podzbioru nie może być kwadratem liczby całkowitej. Jeśli natomiast liczba $m^2 + 1$ należy do podzbioru zbioru S_{n+1}, to suma elementów tego podzbioru jest większa od m^2, a mniejsza od $m^2 + 1 + 2m = (m + 1)^2$, co oznacza, że suma ta nie może być kwadratem liczby całkowitej.