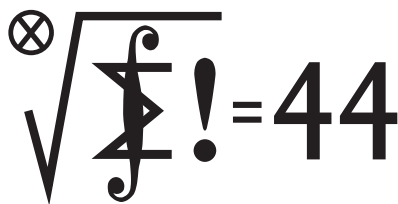


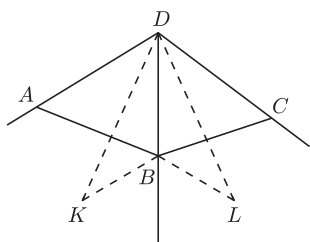
Klub 44



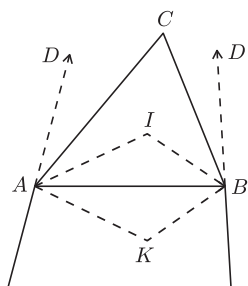
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 565 ($WT = 2,16$) i 566 ($WT = 1,18$) z numeru 9/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	42,80
Marcin Kasperski	Warszawa	42,50
Adam Woryna	Ruda Śląska	42,31
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,53
Zbigniew Galias	Kraków	39,34
Michał Kieza	Warszawa	35,90
Tomasz Warszawski	Kraków	33,73



Rys. 1



Rys. 2

Ustalmy $k \in \{1, \dots, n\}$. Funkcja $(1+x)^k$ ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną równą k , więc jej iloraz różnicowy jest mniejszy od $k+1$ dla x bliskich 0:

$$\frac{(1+x)^k - 1}{x} < k+1 \quad \text{dla } x \in (0; \delta_k).$$

Weźmy dowolną liczbę wymierną $c > 0$, mniejszą od liczb $\delta_1, \dots, \delta_n$. Wówczas

$$(1+c)^k - 1 < (k+1)c \quad \text{dla } k = 1, \dots, n.$$

Przyjmijmy teraz

$$a_k = 1 + (k+1)c, \quad b_k = (1+c)^k \quad \text{dla } k = 1, \dots, n.$$

Tak określone ciągi (a_1, \dots, a_n) i (b_1, \dots, b_n) spełniają postulowane warunki: zachodzą nierówności $b_k < a_k$; zaś zależności $a_{k-1} < b_k$ dla $k = 2, \dots, n$, czyli $1 + kc < (1+c)^k$, to nierówność Bernoulliego.

574. Weźmy pod uwagę sferę dopisaną do czworościanu $ABCD$, styczną do ściany ABC w punkcie I , który jest środkiem koła wpisanego w trójkąt ABC , oraz styczną do płaszczyzn ABD i BCD odpowiednio w punktach K i L . Zauważmy, że $|BK| = |BL|$ i $|DK| = |DL|$.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 581, 582

Redaguje Marcin E. KUCZMA

581. Dany jest n -elementowy zbiór X ($n \geq 4$) oraz $2^{n-2} + 1$ jego różnych podzbiorów. Wykazać, że wśród tych podzbiorów istnieją takie cztery, których część wspólna jest zbiorem pustym lub jednoelementowym.

582. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par funkcji $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mających pochodne wszystkich rzędów i spełniających warunki: $f'(0) = g'(0) = 1$ oraz

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie 582 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2009

Przypominamy treść zadań:

573. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki ciąg arytmetyczny liczb naturalnych (a_1, \dots, a_n) oraz taki ciąg geometryczny liczb naturalnych (b_1, \dots, b_n) , że

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n < a_n.$$

574. W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan jest foremny.

To oznacza, że trójkąty BDK i BDL są przystające, a stąd

$$|\sphericalangle KBD| = |\sphericalangle LBD|$$

(rysunek 1 przedstawia półpłaszczyzny ścian BDA i BDC „rozłożone płasko”).

Podobnie uzasadniamy, że $|\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle IBA|$ (rysunek 2 przedstawia półpłaszczyzny ABK i ABC „rozłożone płasko”) – oraz że $|\sphericalangle LBC| = |\sphericalangle IBC|$.

Oczywiście $|\sphericalangle IBA| = |\sphericalangle IBC|$; stąd $|\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle LBC|$ i w konsekwencji

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABD| &= |\sphericalangle KBD| - |\sphericalangle KBA| = \\ &= |\sphericalangle LBD| - |\sphericalangle LBC| = |\sphericalangle CBD|. \end{aligned}$$

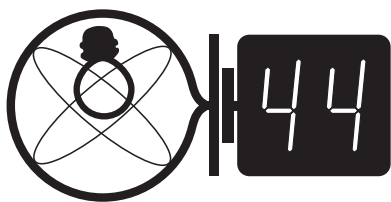
Rozważając sferę dopisaną, styczną do ściany ABD , stwierdzamy analogicznie, że $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBA|$. Zatem wszystkie kąty płaskie ścian przy wierzchołku B są równe:

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBD| =: \beta.$$

W ten sam sposób dowodzimy, że trzy kąty płaskie przy wierzchołku A są równe (oznaczymy ich miarę przez α), kąty przy wierzchołku C są równe (γ) oraz kąty przy wierzchołku D są równe (δ).

Patrząc na sumy kątów w trójkątach ABD i BCD widzimy, że $\alpha = \gamma$. Analogicznie uzasadniamy, że $\alpha = \beta$, $\alpha = \delta$. To znaczy, że wszystkie kąty wszystkich ścian czworościanu są równe. Zatem ściany są trójkątami równobocznymi i czworościan jest foremny.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
466 ($WT = 1,03$) i 467 ($WT = 2,71$)
z numeru 11/2008

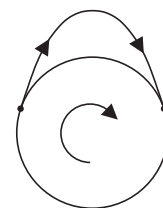
Konrad Kapcia	Częstochowa	44,56
Jerzy Witkowski	Radlin	42,96
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,37
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,30
Andrzej Idzik	Bolesławiec	27,83
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	26,00
Radosław Poleski	Kołobrzeg	23,27

Pan Konrad Kapcia jest od dzisiaj
członkiem Klubu 44F.

Zadania z fizyki nr 478, 479

Redaguje Jerzy B. BROJAN

478. Koło o promieniu $r = 30$ cm obraca się ze stałą prędkością kątową w płaszczyźnie pionowej. W pewnym momencie od koła oderwało się małe ciało (np. kropla wody), a po pewnym czasie spadło na to samo miejsce koła, przyklejając się bez straty energii (tzn. prędkość ciała i brzegu koła w miejscu upadku były jednakowe – zob. rys. 1). Podać co najmniej dwie wartości prędkości kątowej ω , przy których takie zdarzenie jest możliwe. Opór powietrza pominać.



Rys. 1

479. Mamy do dyspozycji kondensator o pojemności C naładowany do napięcia U oraz 2 nienaładowane kondensatory, których pojemności C_1 i C_2 możemy wybrać według życzenia. Kondensatory można dowolnie łączyć w obwód, rozłączać i łączyć ponownie. Dobrać wartości C_1 i C_2 oraz zaprojektować takie połączenia i przełączenia, aby korzystając tylko z energii zgromadzonej w pierwszym kondensatorze uzyskać baterię naładowaną do napięcia $2U$ i o maksymalnej możliwej pojemności zastępczej.

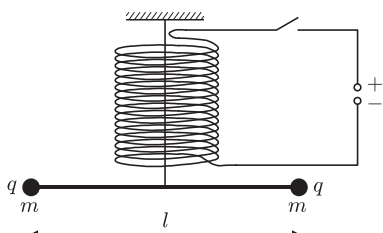
Czy możliwe jest wytworzenie napięcia $2U$, jeśli poza kondensatorem naładowanym dysponujemy tylko jednym kondensatorem dodatkowym oraz zwojnicą? Jeśli tak, to jaką pojemność baterii można uzyskać?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2009

Przypominamy treść zadań:

470. Wagon o długości l jechał ze stałą prędkością po torze początkowo prostoliniowym, który począwszy od pewnego punktu przechodzi w łuk okręgu o promieniu znacznie większym od l , bez przechyłu bocznego. Wózki wagonu są rozmieszczone w odległości d od jego środka, ich rozmiary są małe, a masa wagonu jest rozłożona równomiernie wzdłuż jego długości. Niech F_1 będzie wartością siły poziomej działającej na szynę ze strony pierwszego wózka po jego wejściu w łuk, gdy drugi wózek jeszcze poruszał się po prostej, natomiast F_2 – wartością tej siły, gdy cały wagon znalazł się na łuku. Jeśli $F_1 = \frac{3}{4}F_2$, to jaki wynika stąd wniosek na temat stosunku d do l ?

471. Wzdłuż osi pionowo ustawionej długiej zwojnicy wisi nić, a na nici – poziomy pręt z dwiema kulkami na końcach (rys. 2). Promień zwojnicy jest równy r , liczba zwojów na jednostkę jej długości – n , długość pręta – l , ładunek każdej z kulek – q , masa samego pręta można pominać. Jeśli nić nie wywiera na pręt żadnego momentu siły, to jakim wzorem jest dana prędkość kątowa, jaką uzyska pręt po włączeniu zasilania zwojnicy prądem stałym o natężeniu I ? Czy zjawisko to da się praktycznie zaobserwować przy realnych wartościach wszystkich danych?



Rys. 2

470. Rozpatrujemy ruch wagonu w układzie inercjalnym, w którym drugi wózek pozostawał nieruchomy aż do jego wejścia w zakręt. Wprowadźmy oznaczenia: v – prędkość wagonu, m – jego masa, R – promień łuku. Ruch wagonu po wejściu pierwszego wózka w zakręt jest obrotem wokół osi przechodzącej przez drugi wózek, z przyspieszeniem kątowym równym

$$\varepsilon = \frac{a}{2d} = \frac{v^2}{2Rd},$$

gdzie a jest przyspieszeniem dośrodkowym pierwszego wózka. To wyrażenie należy przyrównać do ilorazu momentu siły F_1 (której ramieniem jest odcinek $2d$) przez moment bezwładności I względem osi obrotu. Zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$I = m \left(d^2 + \frac{1}{12} l^2 \right),$$

a dalej znajdujemy

$$F_1 = \frac{mv^2}{4R} \left(1 + \frac{l^2}{12d^2} \right).$$

Gdy oba wózki znalazły się na łuku, prędkość kątowa wagonu pozostawała stała, a siła F_2 była równa połowie siły odśrodkowej

$$F_2 = \frac{mv^2}{2R}.$$

Z przyrównania $F_1 = \frac{3}{4}F_2$ znajdujemy

$$d/l = 1/\sqrt{6} = 0,408.$$

471. Wartość strumienia indukcji magnetycznej wytworzonego przez zwojnicę jest dana wzorem

$$\Phi = B \cdot \pi r^2 = \mu_0 \pi n I r^2.$$

Zgodnie z równaniem Maxwella pochodna Φ po czasie równa jest krążeniu pola elektrycznego. Wybieramy kontur będący okręgiem o średnicy l i wyznaczamy siłę F działającą na każdą z kulek

$$F = qE = \frac{q}{\pi l} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Prędkość v uzyskana przez kulki jest równa całce z F po czasie, podzielonej przez masę. Stąd znajdujemy szukaną prędkość kątową ω :

$$\omega = \frac{2v}{l} = \frac{2}{l} \frac{q}{\pi l m} \Phi = \mu_0 \frac{2qnIr^2}{ml^2}.$$

Przyjmijmy $r = 2$ cm, $n = 200/\text{cm} = 2 \cdot 10^4/\text{m}$, $l = 10$ cm, $m = 1$ g, $I = 50$ A. Aby ocenić wartość q założmy, że kulkę o promieniu 1 cm ładujemy napięciem 10 kV (z maszyny elektrostatycznej). Wynikiem jest $q \approx 10$ nC i ostatecznie $\omega \approx 10^{-6}$ rad/s. Jak widać, efektu pobudzenia ruchu pręta nie da się zaobserwować w tych warunkach.