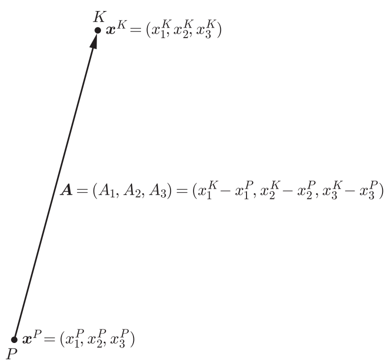
Grawitacja i geometria – szybki przegląd

Marcin DOMAGAŁA[*]

Ogólna teoria względności nauczyła nas, że geometria jest nieodłączną częścią współczesnej fizyki. W teorii tej Albert Einstein wskazał geometrii miejsce równoważne temu, które zajmuje materia. Sprawił, że ta pierwsza stała się obiektem dynamicznym i zaczęto pytać o jej ewolucję i kształt. Wymagało to stworzenia nowego, geometrycznego języka, którym dziś posługuje się współczesna fizyka. Mimo iż ogólna teoria względności jest dość dobrze spopularyzowana, podobnie jak wynikająca z niej współczesna kosmologia, to jej geometryczny opis jest mniej znany szerokim rzeszom czytelników. W niniejszym artykule postaram się uzupełnić tę lukę.

Zacznijmy od nauczanej w szkole fizyki, która odwołuje się do pojęć wprowadzonych jeszcze przez Izaaka Newtona. Uprawiając fizykę newtonowską, mamy do dyspozycji z góry zadaną geometrię. Absolutna przestrzeń jest przestrzenią euklidesową, z którą zapoznajemy się już na początku szkoły podstawowej. Dodatkowo dysponujemy absolutnym czasem, który jest od przestrzeni niezależny i płynie jednostajnie własnym torem.



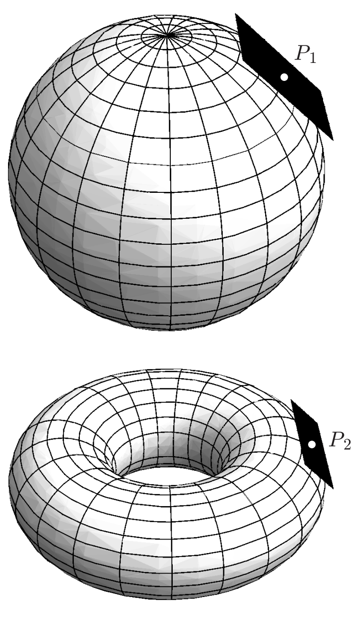
Rys. 1

Przestrzeń euklidesową możemy modelować za pomocą iloczynu kartezjańskiego trzech kopii zbioru liczb rzeczywistych, tj. $\mathbb{R}^3$. Punkty takiej przestrzeni to uporządkowane trójki liczb $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3)$. Podstawowymi obiektami są wektory przesunięcia, a więc wektory, które możemy sobie wyobrazić jako strzałki łączące dwa dane punkty, z których jeden jest punktem początkowym, a drugi końcowym.

W przestrzeni euklidesowej możemy porównywać dwa wektory, bez względu na to, jakie punkty je wyznaczają. Pomaga nam w tym piąty aksjomat Euklidesa, który mówi o tym, że na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić dokładnie jedną prostą z nią rozłączną. Mamy zdefiniowany iloczyn skalarny

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} := A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3,$$

który pozwala obliczać długości wektorów i kąt pomiędzy nimi. Za pomocą tego iloczynu możemy wyznaczać długość dowolnej krzywej. Możemy też zdefiniować odcinek „prosty” jako krzywą o minimalnej długości łączącą dane dwa punkty.



Rys. 2. W małym otoczeniu punktów możemy geometrię zakrzywionej przestrzeni przybliżać geometrią euklidesową.

W przypadku dowolnych przestrzeni powyższe podejście może nie być słuszne. Po pierwsze, piąty aksjomat Euklidesa może nie być spełniony. Po drugie, dwa punkty nie muszą wyznaczać wektora. Po trzecie, nie możemy porównywać wektorów zaczepionych w różnych punktach. Geometria może być euklidesowa tylko w małej skali, tzn. w otoczeniu dowolnego punktu możemy ją za taką uważać, o ile nie oddalamy się za daleko.

Musimy poradzić sobie jeszcze z problemem absolutnego czasu. Czas musi stać się nieodłączną częścią geometrii, która stanie się geometrią czasoprzestrzeni, a nie tylko przestrzeni. Aby poradzić sobie z tymi problemami, fizycy potrzebowali nowego aparatu matematycznego – stworzonej przez Riemanna geometrii różniczkowej. Podstawowymi, używanymi przez nich obiektami, są:

1) Pewien zbiór, który nazywamy rozmaitością. Ma on tę własność, że lokalnie, w odpowiednio małym otoczeniu każdego punktu, wygląda on jak $\mathbb{R}^4$. Sprawia to, że otoczenie każdego punktu możemy w pewien niejednoznaczny sposób utożsamić z podzbiorem $\mathbb{R}^4$, ale nie możemy tego zrobić globalnie. Jest to sytuacja podobna do tej, z jaką mamy do czynienia, żyjąc na powierzchni Ziemi. Poruszając się w swoim mieście, nie jesteśmy w stanie poczuć jej kulistości, a nasze otoczenie wydaje się płaskie. Mapę naszego miasta możemy narysować z doskonałą dokładnością na płaskiej kartce papieru, a dane miejsce może znajdować się na kilku różnych mapach spośród wielu pokrywających glob.

2) W każdym punkcie naszej przestrzeni mamy zaczepioną pewną przestrzeń „wszystkich możliwych prędkości”, jakie może mieć ciało, poruszając się

[*]Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

po krzywej przechodzącej przez ten punkt. Wyrażenia w cudzysłowie nie należy rozumieć zbyt dosłownie. Ma ono na celu wywołać pewne skojarzenie i pobudzić intuicję. Przypominam jednak, że nie mamy już absolutnego czasu i ścisła definicja wymaga matematycznej staranności. W odróżnieniu od przypadku przestrzeni euklidesowej nie możemy porównywać „prędkości” w różnych punktach.

3) W każdym punkcie z osobna mamy iloczyn skalarny dla wektorów „prędkości” zdefiniowanych powyżej. Będziemy go oznaczali przez $g(x)$, gdzie x przypomina nam o tym, że wielkość ta zależy od punktu. Pozwala nam on obliczyć długości prędkości i kąt pomiędzy nimi, ale tylko w danym punkcie.

Zdefiniowane obiekty umożliwiają nam obliczenie długości krzywej. Posłużę się tutaj przykładem podróży samochodem. Znając wskazanie prędkościomierza w każdej chwili, możemy obliczyć dystans, jaki pokonaliśmy. Gdy w geometrii nie mamy zdefiniowanego iloczynu skalarnego dla prędkości w każdym punkcie, to tak, jakbyśmy poruszali się samochodem, w którym prędkościomierz nie ma skali, a widzimy jedynie wychylającą się wskazówkę. Zdefiniowany obiekt $g(x)$ pełni rolę skali, którą w każdej chwili ruchu dokładamy do tarczy. Przypominam, że jest to tylko obraz intuicyjny, a głębsze zrozumienie tych kwestii wymaga matematycznej dokładności. Możemy teraz zdefiniować odcinek „prosty”, który w ogólnym przypadku nazwiemy geodezyjną, jako krzywą, która łączy dwa punkty i ma ekstremalną długość.

Dodajmy, już bez wchodzenia w szczegóły, że obiekt $g(x)$ pozwala przesuwać wektory „równolegle” pomiędzy punktami. Gdy dwa wektory są już zaczepione w tym samym punkcie, potrafimy je porównać. Okazuje się jednak, że przesuwając wektor wzdłuż różnych dróg, możemy otrzymać różne wyniki. Zdarza się to w sytuacji, gdy przestrzeń nie jest płaska.

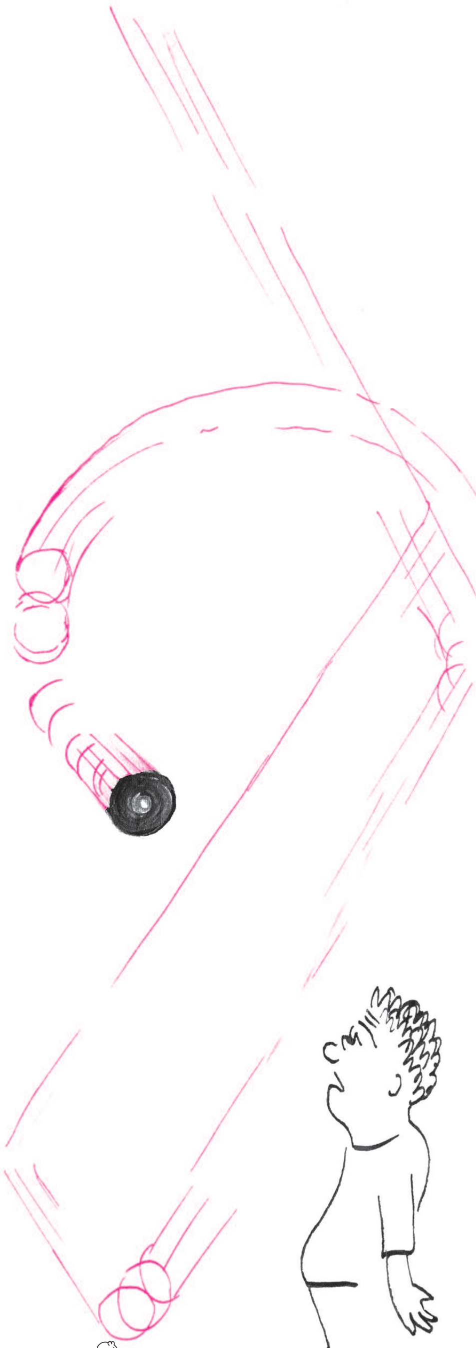
Ogólna teoria względności łączy materię z geometrią za pomocą równań Einsteina

$$G[g] = T,$$

gdzie G jest wielkością, którą obliczamy za pomocą obiektu g i jego pochodnych, natomiast T jest obiektem opisującym materię. Rozwiązywanie tych równań polega na znajdowaniu g. Jest to zadanie dość trudne i w ogólności niewykonalne. Dlatego fizycy starają się uprościć to postępowanie, czyniąc pewne założenia na temat materii (T) lub na temat symetrii czasoprzestrzeni, co ma swoje odzwierciedlenie w postaci g.

Rozważając czasoprzestrzeń całkowicie pozbawioną materii ($T = 0$), która jest sferycznie symetryczna, otrzymujemy rozwiązanie opisujące czarną dziurę. Ciekawe, że rozwiązanie takie ma jeden wolny parametr, który okazuje się być masą w rozumieniu grawitacji Newtona. Analogię tę znajdujemy, badając ruch cząstek próbnych daleko od centrum symetrii. Poruszają się one tak, jak gdyby znajdowały się w newtonowskim polu grawitacyjnym masy M, mimo iż, jak wspomniałem na początku, rozważaliśmy pustą czasoprzestrzeń. Rowiązanie to ma również tę własność, że środek symetrii jest punktem, który fizycy nazywają osobliwością – miejscem, gdzie teoria się załamuje, gdyż pewne własności geometrii stają się tak ekstremalne, a opisujące geometrię parametry nieskończone, że przestajemy wierzyć w możliwość istnienia takich warunków w przyrodzie (matematycy zdają się zachowywać zimną krew w obliczu takich nieskończoności).

Rozważając inny model, w którym Wszechświat wypełniony jest pyłem – za ziarenka tego pyłu służą galaktyki! – otrzymujemy modele kosmologiczne. Dodatkowo czynimy założenie, uzasadnione doświadczalnie, że Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Oznacza to tylko tyle, że wygląda on tak samo, bez względu na to, w którym kierunku i z którego miejsca go obserwujemy. Założenia te okazują się na tyle silne, że pozwalają sprowadzić ewolucję Wszechświata do badania jednej funkcji $a(t)$, gdzie t jest współrzędnościowym czasem Wszechświata. Czasoprzestrzeń modelu kosmologicznego możemy pociąć na trójwymiarowe plastry, które następują po sobie. O kolejności ich następowania mówi parametr t. Wszystkie plastry są



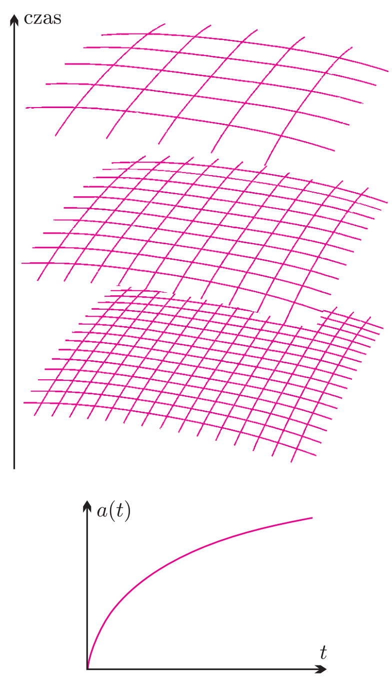
Rozwiązanie zadania M 1240.
Taka 19-cyfrowa liczba N istnieje, np. $N = 2121\ldots12$.

Wiadomo, że k-cyfrowa liczba $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$ jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ jest podzielna przez 11. Stąd wynika, że liczba N jest podzielna przez 11.

Wykażemy teraz, że każda inna liczba $n = \overline{a_{19} a_{18} \ldots a_2 a_1}$, otrzymana z N poprzez permutację jej cyfr, nie jest podzielna przez 11.

Ponieważ wśród cyfr $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ liczby n jest dokładnie 10 dwójek i 9 jedynek, więc liczba S jest nieparzysta. Ponadto $-7 \leqslant S \leqslant 11$. Stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy $S = 11$. To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy $n = N$.

takie same i mogą być nieskończone. Liczba $a(t)$ mówi nam o tym, jak zmienia się skala tych plastrów. Na przykład, w tzw. modelu płaskim poszczególne plastry są trójwymiarowymi przestrzeniami euklidesowymi. Gdy zaznaczymy dowolne dwa punkty (tj. odległe galaktyki), to ich fizyczna odległość będzie zmieniała się zgodnie ze wzorem $L = a(t)L_0$. Model kosmologiczny przewiduje, że dla odpowiednio małego parametru t czynnik skali wyniesie 0 i cały nieskończony plaster zostanie ściśnięty tak, że odległość dowolnych dwóch punktów wyniesie zero – i gęstość Wszechświata będzie nieskończona. Podobnie jak w przypadku sferycznie symetrycznym jest to punkt, w którym załamuje się teoria. Tę osobliwość nazywamy popularnie Wielkim Wybuchem, choć dziś miano to zarezerwowano raczej dla procesu, w którym wyłonił się gorący, wypełniony promieniowaniem Wszechświat.



Rys. 3. W rozszerzającym się Wszechświecie przestrzeń „puchnie”. Wzrost odległości między ustalonymi punktami-galaktykami opisuje funkcja $a(t)$.

Istnienie tych dziwnych punktów sprawia, że fizycy obdarzają teorię małym zaufaniem w ich otoczeniu. Wierzą, że tak jak dla materii, gdzie teoria kwantowa rozwiązała wiele problemów z niepożądanymi nieskończonościami, odpowiednia kwantowa teoria grawitacji i geometrii zapewni rozwiązanie problemu osobliwości. Jednak, choć wielu fizyków głowi się nieustannie nad sformułowaniem takiej teorii, jak dotąd ostateczna odpowiedź wymyka się umysłom badaczy, tworzących konkurencyjne modele. Jeden z takich modeli – pętlowa kwantowa grawitacja – pozwala przeformułować ogólną teorię względności w sposób, który czyni ją podobną kwantowym teoriom opisującym materię. Postępując analogicznie jak w tamtych przypadkach, otrzymujemy nowy model kosmologiczny, w którym nie występuje początkowa osobliwość Wszechświata. W modelu tym Wszechświat dawno temu kurczył się, osiągając stan o maksymalnej gęstości, po czym zaczął się rozszerzać i rozszerzanie to trwa po dziś dzień.

Czy jest to dobry opis? Tego zagwarantować nie można, model wymaga bowiem wciąż wiele pracy dla jego lepszego zrozumienia. Być może jednak jesteśmy świadkami wyłaniania się odpowiedzi na trapiący od dawna fizyków problem początkowej osobliwości...

Przedstawiony tutaj obraz jest, oczywiście, bardzo uproszczony i niepełny. Czytelnika Wnikliwego, który chciałby dowiedzieć się czegoś więcej o grawitacji i geometrii, odsyłam do podanej poniżej literatury:

1) R. Penrose, *Droga do rzeczywistości.*
2) M. Heller, *Ewolucja kosmosu i kosmologii.*
3) W. Kopczyński, A. Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja.*
4) B. F. Schulz, *Wstęp do ogólnej teorii względności.*

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 9 i A 10 czekamy do 1 czerwca 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

A 9. Brązowy karzeł o rozmiarach Jowisza (promień $R = 70\,000$ km) ma temperaturę powierzchniową $T = 1400$ K. Jaka jest moc jego promieniowania w stosunku do mocy Słońca, którego temperatura powierzchniowa jest równa $T_\odot = 5800$ K? Brakującą daną weź z tablic. [1 pkt]

A 10. Energia wyzwolona przy syntezie jednego jądra helu z czterech protonów to 27 MeV. Proces syntezy helu w jądrze gwiazdy typu Słońca ustaje po zużyciu 10% zapasu wodoru, natomiast gwiazda nadal może palić wodór w powłoce na zewnątrz helowego jądra. Jak długo będzie trwać świecenie takiego Słońca kosztem spalania wodoru, jeśli proces zakończy się po zużyciu 13% całkowitego zapasu paliwa? Przyjmij masę Słońca równą $2 \cdot 10^{30}$ kg, jego jasność $3{,}8 \cdot 10^{26}$ W, a wodór niech stanowi 70% masy Słońca. [2 pkt]

Rozwiązania zadań z numeru 3/2009

A 5. Jeżeli σ oznacza powierzchnię boiska, a $S = 1360$ W/m^2 stałą słoneczną, to czas oczekiwanego naświetlania boiska wynosi

$$t = 4 \cdot 10^{15}/(\sigma S) = 4{,}2 \cdot 10^8 \text{ s} = 13{,}3 \text{ lat.}$$

A 6. Odległość mgławicy $r = 4{,}7 \cdot 10^{19}$ m. Promień kątowy mgławicy $1{,}75 \cdot 10^{-4}$ rad, co odpowiada $8{,}2 \cdot 10^{12}$ km. O ile ekspansja mgławicy zachodzi jednostajnie, to czas ekspansji wynosi $5{,}5 \cdot 10^{11}$ s, czyli 17 500 lat.