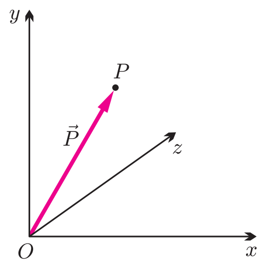
Śledzenie promieni

Tomasz IDZIASZEK[*]



Rys. 1. Układ współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej z przykładowym punktem P i wektorem $\vec{P}$.

Trójwymiarowa przestrzeń. Cała zabawa odbywać się będzie w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wprowadźmy w tej przestrzeni układ współrzędnych jak na rysunku 1. Współrzędne punktu P będziemy oznaczać przez (x_P, y_P, z_P). Środkiem układu współrzędnych jest punkt $O = (0, 0, 0)$. Dla punktów P i Q możemy zdefiniować działanie odejmowania, w wyniku którego uzyskujemy wektor:

$$P - Q = [x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q].$$

Wektory zapisujemy w kwadratowych nawiasach, przy czym dla punktu P zapis $\vec{P}$ będzie oznaczał wektor $P - O$. Długość wektora $\vec{P}$ definiujemy jako

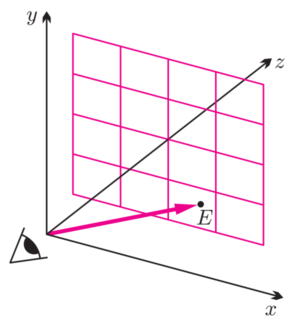
$$|\vec{P}| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}.$$

Mając dane dwa wektory $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, możemy zdefiniować ich iloczyn skalarny wzorem

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = x_P x_Q + y_P y_Q + z_P z_Q.$$

Jeśli α jest kątem między wektorami $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, to prawdziwa jest zależność

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}| \cos\alpha. \tag{1}$$

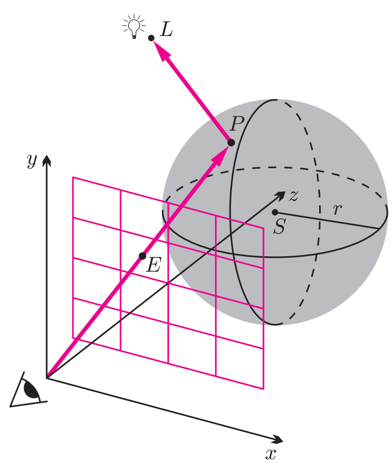


Rys. 2. Szyba podzielona na 4×4 kwadracików. Zaznaczono wektor $\vec{E}$ dla kwadracika $(3, 2)$.

Scena a ekran komputera. Wyobraźmy sobie, że w punkcie O trójwymiarowej sceny znajduje się oko, patrzące wzdłuż osi Oz (patrz rysunek 2).
W płaszczyźnie $z = z_E$ znajduje się kwadratowa szyba o boku długości 2. Jeżeli pole widzenia oka ograniczone jest do powierzchni szyby, to każdy promień wpadający do oka przecina szybę w pewnym punkcie $E = (x_E, y_E, z_E)$. Podzielmy teraz powierzchnię szyby na $w \times w$ małych kwadracików i dla każdego kwadracika (i, j) zapamiętajmy natężenie światła, które miał promień przechodzący przez środek kwadracika:

for $i := 0$ **to** $w - 1$ **do**
  for $j := 0$ **to** $w - 1$ **do**
    $y_E := -(2i + 1)/w + 1$
    $x_E := (2j + 1)/w - 1$
    $t[i, j] :=$ natężenie(x_E, y_E, z_E)

Jeśli teraz zamiast szyby umieścimy ekran o rozdzielczości $w \times w$ pikseli i jasność piksela (i, j) ustawimy na $t[i, j]$, to, gdy w będzie dostatecznie duże, oko nie zauważy różnicy. Tym sposobem udało nam się przenieść trójwymiarową scenę na dwuwymiarowy ekran.



Rys. 3. Droga promienia od oka do źródła światła.

Przecinamy kulę. Musimy zatem umieć obliczyć natężenie światła przenoszone przez promień równoległy do wektora $\vec{E}$ (tzn. poprowadzony wzdłuż tego wektora). W rzeczywistym świecie promień światła jest emitowany przez źródło światła (np. żarówkę) i biegnie przez świat, odbijając się i załamując, by dotrzeć w końcu do naszego oka. W naszym programie spróbujemy odtworzyć drogę promienia od końca, tzn. od oka do źródła światła.

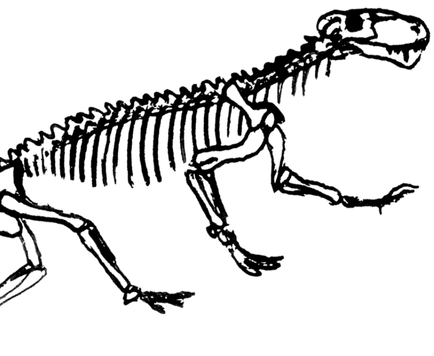
Nasz świat będzie bardzo prosty: w punkcie L umieścimy malutką żarówkę, która będzie emitowała światło o stałym natężeniu I równomiernie we wszystkich kierunkach. W punkcie S umieścimy zaś kulę o promieniu r (patrz rysunek 3).

Teraz każdy promień światła, który dotarł do oka (tak naprawdę to prawie każdy – pomijamy jedyny promień biegnący bezpośrednio z żarówki; źródło światła traktujemy jako punktowe), musiał odbić się od punktu na powierzchni kuli. Naszym zadaniem będzie zatem sprawdzić, czy promień OE przecina kulę, i jeśli tak, to w jakim punkcie.

[*]doktorant, Instytut Informatyki UW

Załóżmy, że promień przecina kulę w punkcie $P = O + t\vec{E}$ dla pewnego dodatniego t. Punkt ten musi leżeć na sferze, zatem odległość między punktami S i P musi wynosić r:

$$(tx_E - x_S)^2 + (ty_E - y_S)^2 + (tz_E - z_S)^2 = r^2.$$



Grupując wyrazy względem potęg t, otrzymujemy

$$t^2(x_E^2 + y_E^2 + z_E^2) - 2t(x_E x_S + y_E y_S + z_E z_S) + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2 - r^2 = 0,$$

co można zapisać zwięźlej, korzystając z długości wektora i iloczynu skalarnego:

$$t^2|\vec{E}|^2 - 2t\vec{E}\cdot\vec{S} + |\vec{S}|^2 - r^2 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, dostajemy

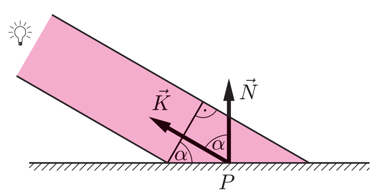
$$\Delta = 4(\vec{E}\cdot\vec{S})^2 - 4|\vec{E}|^2(|\vec{S}|^2 - r^2),$$

$$t = \frac{2\vec{E}\cdot\vec{S} \pm \sqrt{\Delta}}{2|\vec{E}|^2}. \tag{2}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań, zatem promień nie przecina kuli, dla $\Delta = 0$ promień jest do kuli styczny. W przeciwnym przypadku promień przecina sferę w dwóch punktach, a nas interesuje punkt znajdujący się bliżej oka, czyli odpowiadający mniejszej wartości parametru t. Ponieważ mianownik w równaniu (2) jest dodatni, mniejszy pierwiastek uzyskamy, wybierając wzór z minusem. Zatem ostatecznie szukanym punktem jest

$$P = O + \frac{\vec{E}\cdot\vec{S} - \sqrt{(\vec{E}\cdot\vec{S})^2 - |\vec{E}|^2(|\vec{S}|^2 - r^2)}}{|\vec{E}|^2}\vec{E}.$$

Podążamy w kierunku światła. Przyjmiemy teraz założenie, że powierzchnia kuli jest matowa i promienie padające na powierzchnię odbijają się od niej równomiernie we wszystkich kierunkach. Ponadto założymy, że natężenie światła padającego na powierzchnię jest wprost proporcjonalne do kosinusa kąta między wektorem prostopadłym (tzw. *normalnym*) do powierzchni a wektorem padania światła. Taki model oświetlenia nazywa się modelem lambertowskim, ilustruje go rysunek 4.



Rys. 4. Strumień światła o małym przekroju D oświetla powierzchnię $\frac{D}{\cos\alpha}$, gdzie α jest kątem między wektorami $\vec{N}$ i $\vec{K}$. Tak więc natężenie światła w punkcie P wynosi $I\alpha$, gdzie I jest natężeniem źródła światła. Pytanie do Czytelnika: dlaczego natężenie światła docierające do oka nie zależy od położenia oka względem punktu P?

Wektor padania światła jest następujący:

$$\vec{K}_P = \frac{L - P}{|L - P|}.$$

A jak wyznaczyć wektor normalny do powierzchni sfery w punkcie P? Również bardzo prosto: wiemy, że promień PS kuli jest prostopadły do płaszczyzny stycznej w punkcie P. Zatem wektor normalny jest dany wzorem:

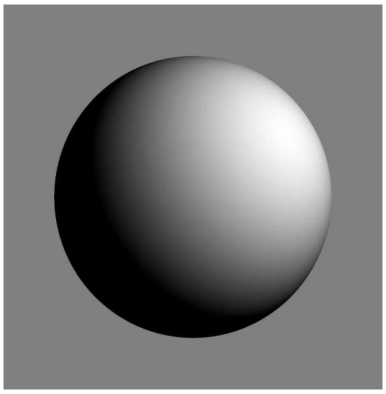
$$\vec{N}_P = \frac{P - S}{r}.$$

Ze wzoru (1) wiemy, że kosinus kąta między unormowanymi wektorami jest równy iloczynowi skalarnemu tych wektorów. Chwileczkę, ale w przeciwieństwie do natężenia światła iloczyn skalarny może być wartością ujemną, zatem coś jest tu nie tak! To prawda, zapomnieliśmy o „ciemnej stronie" kuli, czyli tych punktach, które nie są w ogóle oświetlone przez źródło światła. Łatwo się przekonać, że dla tych punktów iloczyn skalarny będzie ujemny.

Zatem natężenie światła w punkcie P jest równe

$$I_P = I\max(0, \vec{N}_P\cdot\vec{K}_P) = I\max\left(0, \frac{(L-P)\cdot(P-S)}{|L-P|r}\right).$$

Możemy już napisać program. Aby kula była lepiej widoczna, ustaliliśmy jasność promieni nieprzecinających kuli na 1/2. Ze strony internetowej *Delty* można ściągnąć konkretną implementację poniższej procedury, która generuje obrazek z rysunku 5.



Rys. 5. Wynik działania programu dla $z_E = 2$, $S = (0, 0, 3\frac{1}{5})$, $r = 1\frac{1}{10}$, $L = (1\frac{1}{2}, 1, 1)$.

function natężenie(x_E, y_E, z_E)
  $E := x_E^2 + y_E^2 + z_E^2$
  $S := x_S^2 + y_S^2 + z_S^2$
  $C := x_E x_S + y_E y_S + z_E z_S$
  $\Delta := C^2 - E(S - r^2)$
  if $\Delta \leqslant 0$ **then return** $1/2$
  $t := (C - \sqrt{\Delta})/E$
  $(x_P, y_P, z_P) := (tx_E, ty_E, tz_E)$
  $(x_N, y_N, z_N) := (x_P - x_S, y_P - y_S, z_P - z_S)$
  $(x_K, y_K, z_K) := (x_L - x_P, y_L - y_P, z_L - z_P)$
  $K := x_K^2 + y_K^2 + z_K^2$
  $D := x_N x_K + y_N y_K + z_N z_K$
  if $D \leqslant 0$ **then return** 0
  return $ID/r\sqrt{K}$

Co dalej? Powyższy program był prościutką realizacją ogólnej metody generowania trójwymiarowych obrazów znanej jako śledzenie promieni (ang. *ray tracing*). Zachęcamy Czytelników do eksperymentów i poszerzenia programu o nowe możliwości. Proponujemy dodać większą liczbę kul i źródeł światła, nowe obiekty, np. płaszczyzny (konieczny będzie nowy algorytm wyznaczania przecięć), cienie (należy badać, czy wektor padania światła nie przecina innych obiektów), czy też obiekty o błyszczącej powierzchni (należy zastosować inny model oświetlenia, np. model Phonga).

Gwarantujemy, że otrzymane efekty wizualne wynagrodzą trud włożony w samodzielne napisanie takiego programu.

Zadania

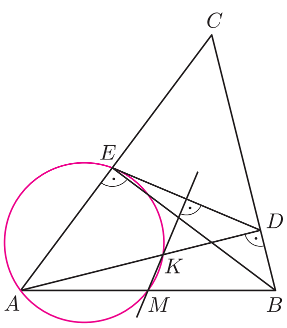
Redaguje Waldemar POMPE

M 1237. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych m, n, gdzie $m > n > 0$, spełniona jest nierówność

$$\mathrm{NWW}(m, n) + \mathrm{NWW}(m{+}1, n{+}1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

Rozwiązanie na str. 5

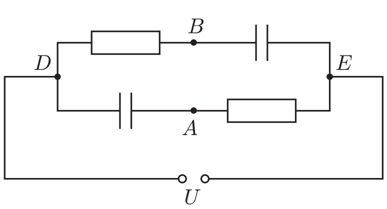
M 1238. Dane są trzy trójmiany kwadratowe o różnych współczynnikach przy x^2. Wiadomo, że wykresy każdych dwóch z nich mają dokładnie jeden punkt wspólny. Wykazać, że istnieje punkt wspólny wykresów wszystkich trzech trójmianów.
Rozwiązanie na str. 6



Rys. 1

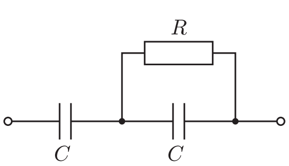
M 1239. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC (rys. 1). Punkty D i E są spodkami wysokości tego trójkąta, poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Prosta przechodząca przez punkt M i prostopadła do prostej DE przecina prostą AD w punkcie K. Dowieść, że punkty A, M, K, E leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 2

F 737. Do źródła prądu zmiennego o napięciu skutecznym $U_0 = 220$ V podłączono obwód pokazany na rysunku 2. Jakie jest napięcie między punktami A i B?
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 3

F 738. Do źródła prądu zmiennego o napięciu 220 V i częstotliwości 50 Hz podłączono szeregowo dwa kondensatory o pojemności 1 μF każdy. Następnie równolegle do jednego z nich dołączono opornik $R = 100$ kΩ (rys. 3). Znaleźć średnią moc tego układu.
Rozwiązanie na str. 24