Nierówności między średnimi

Joachim JELISIEJEW

Praca nagrodzona złotym medalem na XXX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, Częstochowa 2008.

Powszechnie znane są nierówności między średnimi dla dwóch dodatnich liczb rzeczywistych a i b:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Zajmować się będziemy pewnym uogólnieniem tych nierówności, a mianowicie nierównością między średnimi potęgowymi. Dla a, b dodatnich zdefiniujmy funkcję $M_x(a,b)$ jako $M_x(a,b) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, natomiast $M_0(a,b) = \sqrt{ab}$. Zatem wartością funkcji $M_x(a,b)$ jest średnia potęgowa rzędu x z liczb a i b, a nierówność między średnimi potęgowymi to stwierdzenie, że jest to funkcja niemalejąca względem x, czyli jeśli $x \leqslant y$, to $M_x(a,b) \leqslant M_y(a,b)$. Elementarny dowód tego faktu można znaleźć w [1].

Definicja średniej dla $x = 0$ wynika z

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}.$$

Nierówności $M_{-1}(a,b) \leqslant M_0(a,b) \leqslant M_1(a,b) \leqslant M_2(a,b)$ są równoważne

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

więc jest to rzeczywiście uogólnienie nierówności między średnimi.

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań, uprośćmy trochę nazewnictwo. Wszystkie liczby występujące dalej w artykule są rzeczywiste, a symbole a, b zawsze oznaczają dowolne liczby **dodatnie**. Dla klarowności ustalmy też, że $M_x = M_x(a,b)$.

Przedstawmy teraz główne wyniki pracy:

Twierdzenie 1. *Jeżeli $x \geqslant 0$, to dla wszystkich a, b, y jest $(M_x)^2 \geqslant M_{x-y} \cdot M_{x+y}$, jeżeli zaś $x \leqslant 0$, to dla wszystkich a, b, y jest $(M_x)^2 \leqslant M_{x-y} \cdot M_{x+y}$.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli $x \geqslant 1$, to dla wszystkich a, b, y jest $2M_x \geqslant M_{x-y} + M_{x+y}$.*

Tematykę twierdzenia 2 porusza następujące zadanie (2. etap LVIII OM): Udowodnij, że dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, spełniających warunek $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = 4$, zachodzi $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2\cdot(a+b+c+d) - 4$. Lemat do tego zadania mówi, że $a + b \geqslant \frac{2ab}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$, czyli $2M_1 \geqslant M_{-1} + M_3$, co wynika z twierdzenia 2.

Wniosek 1. *Funkcja $\ln M_x$ jest, względem x, wklęsła na $[0, \infty)$ i wypukła na $(-\infty, 0]$.*

Wniosek 2. *Jeżeli $x \leqslant 0$, to dla wszystkich a, b, y jest $2M_x \leqslant M_{x-y} + M_{x+y}$, z czego wynika, że funkcja M_x jest, względem x, wypukła na $(-\infty, 0]$.*

Wniosek 3. *Funkcja M_x jest, względem x, wklęsła na $[1, \infty)$.*

Wnioski 1 i 3 korzystają z faktu, którego nie będę tutaj udowadniać: *jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\left(\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$ dla dowolnych $x, y \in [c, d]$, to f jest wypukła (wklęsła) na przedziale $[c, d]$.* By otrzymać wniosek 1, należy dodatkowo zlogarytmować nierówność z twierdzenia 1.

Funkcja $f(x)$ jest *wypukła* (*wklęsła*) na przedziale $[c, d]$, jeżeli dla dowolnych $x, y \in [c, d]$ odcinek o punktach końcowych $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ leży nad (pod) wykresem funkcji f.

Zatrzymajmy się na chwilę przy wniosku 2. Z twierdzenia 1 wiemy, że jeżeli $x \leqslant 0$, to $(M_x)^2 \leqslant M_{x-y} \cdot M_{x+y}$, co można inaczej zapisać jako $M_x \leqslant M_0(M_{x-y}, M_{x+y})$. Ale jest $M_x \leqslant M_y$ gdy $x \leqslant y$, więc $M_0(M_{x-y}, M_{x+y}) \leqslant M_1(M_{x-y}, M_{x+y}) = \frac{M_{x-y}+M_{x+y}}{2}$ i dalej rozumujemy jak przy wnioskach 1 i 3.

Logarytmowanie nierówności polega na zastąpieniu nierówności $x \leqslant y$ (gdzie $x, y > 0$) przez $\ln(x) \leqslant \ln(y)$, co nie zmienia znaku nierówności, ponieważ funkcja $\ln(x)$ jest rosnąca.

Pozostają nam do wykazania twierdzenia 1 i 2. Poniżej zamieszczamy, dość analityczny i pobieżny, niestety, dowód 1 i pewne wskazówki do dowodu 2.

Główną cześcią dowodu jest następujący lemat, który podajemy bez dowodu (oprócz szkicu na marginesie).

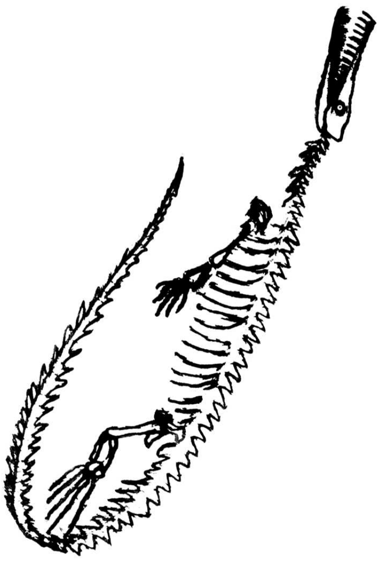
Lemat. *Niech $g = g(x,y)$ będzie taką funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych dodatnich, że $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \leqslant 0$ w dowolnym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Jeżeli dla każdego $c \in \mathbb{R}$ jest $\lim_{x\to\infty} g(x, x+c) = 0$, to nierówność $g(x,y) \geqslant 0$ zachodzi dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$.*

Jeżeli weźmiemy $h(x) = g(x, x+c)$ (dla ustalonego c), to

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{dh}{dx} \leqslant 0$$

i $\lim_{x\to\infty} g(x, x+c) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. Jest więc h funkcją nierosnącą, której granica w nieskończoności wynosi 0, czyli h jest stale nieujemna i g jest nieujemna.

Przystępujemy do dowodu twierdzenia 1. Możemy je sformułować inaczej, logarytmując:
Dla wszystkich a, b, y funkcja $g(a,b,x,y) = 2\ln M_x - \ln M_{x-y} - \ln M_{x+y}$ jest nieujemna dla $x \geqslant 0$ i niedodatnia dla $x \leqslant 0$.



Ustalmy $x > 0$ i y. Wtedy g staje się funkcją a, b.

Obliczamy
$$\frac{\partial \ln M_x}{\partial a} + \frac{\partial \ln M_x}{\partial b} = \frac{a^{x-1}}{a^x + b^x} + \frac{b^{x-1}}{a^x + b^x} = \frac{a^{x-1} + b^{x-1}}{a^x + b^x}.$$
By było $\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b} \leqslant 0$, musi być
$$2\frac{a^{x-1} + b^{x-1}}{a^x + b^x} \leqslant \frac{a^{x-y-1} + b^{x-y-1}}{a^{x-y} + b^{x-y}} + \frac{a^{x+y-1} + b^{x+y-1}}{a^{x+y} + b^{x+y}},$$
co można udowodnić elementarnie i co pozostawiamy jako ćwiczenie.

Mamy, dla stałego c,
$$\lim_{a\to\infty} \frac{M_x(a, a+c)}{a} = 1,$$
stąd $\lim_{a\to\infty} \ln(M_x(a, a+c)) - \ln(a) = 0$, a stąd już wynika $\lim_{a\to\infty} g(a, a+c) = 0$.

Tym samym g spełnia założenia lematu, więc g jest stale nieujemna dla $x \geqslant 0$. By udowodnić, że g jest stale niedodatnia dla $x \leqslant 0$, można lekko zmodyfikować powyższe rozumowanie albo skorzystać z ciekawej tożsamości $M_x \cdot M_{-x} = (M_0)^2$ (którą pozostawiamy do udowodnienia Czytelnikowi). Mianowicie, $(M_x)^2 \leqslant M_{x-y} \cdot M_{x+y}$ (dla $x \leqslant 0$) jest równoważne
$$\frac{(M_0)^4}{(M_{-x})^2} \leqslant \frac{(M_0)^2}{M_{-(x-y)}} \cdot \frac{(M_0)^2}{M_{-(x+y)}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{(M_{-x})^2} \leqslant \frac{1}{M_{-x+y} \cdot M_{-x-y}},$$
skąd po podniesieniu do potęgi -1 dostajemy $(M_{-x})^2 \geqslant M_{-x+y} \cdot M_{-x-y}$, co jest prawdą, bowiem $-x \geqslant 0$.

Dowód twierdzenia 2 jest bardziej skomplikowany: najpierw w dość analogiczny sposób jak przy 1 (choć obliczenie granicy jest trudniejsze) wykazujemy, że twierdzenie zachodzi dla $x = 1$, potem rozszerzamy ten rezultat za pomocą podstawień na wszystkie $x \geqslant 1$.

Udowodnione twierdzenia i wnioski są dość ogólne – w wielu przypadkach okazują się one wystarczające do rozwiązania zadania dotyczącego średnich. Jeżeli wiemy, że funkcja M_x jest wypukła na $[1, \infty)$ i wklęsła na $(-\infty, 0]$, to możemy używać np. nierówności Jensena (patrz [1], *Delta* 6/2008), co pozwala nam na udowadnianie fantazyjnych nierówności w rodzaju $\left(\frac{a^4+b^4}{2}\right)^{1/4} + a + b \leqslant 3\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}$, co jest równoważne $M_4 + 2M_1 \leqslant 3M_2$ i co można zapisać (biorąc $f(x) = M_x$) jako $\frac{1}{3}f(4) + \frac{2}{3}f(1) \leqslant f(2)$.

Nierówność Jensena: Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła na przedziale $[c, d]$, liczby dodatnie $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sumują się do 1 oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [c, d]$, to
$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right),$$
jeżeli zaś f jest wklęsła na $[c, d]$, to nierówność zachodzi w drugą stronę.

Zwróćmy uwagę, że w rzeczywistości powyższe rezultaty dotyczą nierówności postaci $M_{x_1} \leqslant M_y(M_{x_3}, M_{x_4})$ dla y równego 0 i 1. Można je przenieść na pozostałe y przez odpowiednie podstawienia, otrzymując np. nierówność
$$M_{x_0} \geqslant \sqrt{\frac{(M_{x_0-y})^2 + (M_{x_0+y})^2}{2}}$$
dla $x_0 \geqslant 2$ i dowolnych y, a, b.

Jak zwykle, pewne pytania pozostają otwarte. Na przykład, wiadomo że $x_0 = 1$ jest taką najmniejszą liczbą, że dla wszystkich a, b, y jest $2M_{x_0} \geqslant M_{x_0-y} + M_{x_0+y}$. Nie wiadomo jednak, czy $x_0 = 0$ jest taką największą liczbą, że dla wszystkich a, b, y zachodzi $2M_{x_0} \leqslant M_{x_0-y} + M_{x_0+y}$. Nie wiadomo też, dla jakich y zachodzi nierówność $2M_{x_0} \geqslant M_{x_0-y} + M_{x_0+y}$, jeżeli $0 < x_0 < 1$. Numerycznie można stwierdzić, że y zależy od a, b oraz, najprawdopodobniej, gdy ustalimy a, b, to dla y mniejszych od pewnego y_0 nierówność zachodzi, natomiast dla $y > y_0$ zachodzi ona w drugą stronę.

Jest $\lim_{x\to\infty} M_x = \max(a, b)$ i $\lim_{x\to-\infty} M_x = \min(a, b)$, czyli $\lim_{y\to\infty} M_{x_0-y} + M_{x_0+y} = \min(a, b) + \max(a, b) = a + b = 2M_1$, co sprawia, że dla $x_0 < 1$ i dostatecznie dużego y (wybieranego w zależności od a, b) jest $2M_{x_0} \leqslant M_{x_0-y} + M_{x_0+y}$.

Nie wiadomo wreszcie, na ile powyższe wnioski da się uogólnić na większą liczbę zmiennych np. dla funkcji $M_x(a, b, c) : M_x(a, b, c) = \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ dla $x \neq 0$ i $M_0(a, b, c) = \sqrt[3]{abc}$. Wiadomo, że nie jest ona wypukła względem x na $(1, \infty)$ dla dowolnych a, b, c. Czy istnieje w ogóle takie x_0, że $M_x(a, b, c)$ jest wypukła względem x na (x_0, ∞)? Jakie ograniczenia trzeba nałożyć na a, b, c, żeby $M_x(a, b, c)$ była wypukła na $[1, \infty)$? Które elementy rozumowania można rozszerzyć na ogólny przypadek średniej potęgowej n liczb?

[1] L. Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Aksjomat, Toruń 2000.