Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
464 ($WT = 2{,}10$) i 465 ($WT = 1{,}90$)
z numeru 10/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	40,03
Tomasz Wietecha	Tarnów	28,63
Krzysztof Magiera	Łosiów	27,27
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	26,00
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,36

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

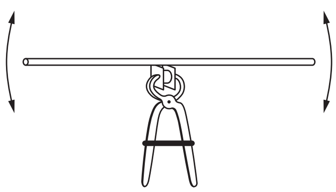
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 476, 477

Redaguje Jerzy B. BROJAN

476. Dwie małe płytki ołowiane ustawiono pionowo, przedzielając je kawałkiem korka, ściśnięto obcęgami, zawiązując rączki drutem i zamocowano obcęgi nieruchomo. Gdy na płytkach poziomo położono rozgrzany pręt metalowy, zaczął się on „kołysać” – przechylać na przemian w jedną i drugą stronę (rys. 1). Wyjaśnić przyczynę zjawiska.

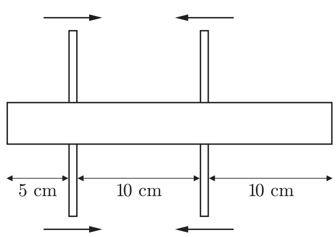


Rys. 1

477. Małe ciało (punkt materialny) porusza się po „powierzchni śrubowej”, opisanej równaniami parametrycznymi

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad z = d\alpha \quad (r \text{ i } \alpha \text{ – zmienne niezależne, } d \text{ – stała}).$$

Jedyną siłą działającą na ciało jest siła utrzymująca je na tej powierzchni, skierowana prostopadle do niej. W chwili początkowej zmienna r miała wartość r_0, a prędkość tworzyła z wektorem $[r_0\cos\alpha_0, r_0\sin\alpha_0, 0]$ kąt β (ze zwrotem w stronę osi $r=0$, tzn. początkowo r malało). Jaki warunek powinny spełniać wymienione parametry, aby ciało nie trafiło w oś? Jeśli ten warunek jest spełniony, to jaką minimalną wartość osiągnęła zmienna r podczas ruchu ciała?



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 12/2008

Przypominamy treść zadań:

468. Na dwóch jednakowych cienkich ołówkach położono linijkę (rys. 2) i powoli, płynnym ruchem zbliżano do siebie ołówki. Gdy zaznaczone wymiary osiągnęły podane wartości, linijka przestała się ślizgać po prawym ołówku, a zaczęła po lewym. Jaki wniosek na temat wartości współczynników tarcia kinetycznego f_{k} i statycznego f_{s} można wyciągnąć z tych danych?

469. Nadwyżka ciśnienia wewnątrz bańki mydlanej jest (jak można wykazać) odwrotnie proporcjonalna do promienia bańki. Udowodnić, że molowe ciepło C powietrza zawartego wewnątrz bańki zawiera się w przedziale

$$C_{\mathrm{V}} + \mathrm{R} < C < C_{\mathrm{V}} + \frac{3}{2}\mathrm{R},$$

gdzie C_{V} jest ciepłem molowym przy stałej objętości, a R – uniwersalną stałą gazową. Powietrze należy uznać za gaz doskonały, a ciśnienie zewnętrzne – za stałe.

468. Środek masy linijki jest w rozpatrywanym momencie w odległości 2,5 cm od prawego ołówka i 7,5 cm od lewego, a ponieważ linijka jest w stanie bliskim równowagi, więc siła nacisku na prawy ołówek jest równa 3/4 jej ciężaru, a siła nacisku na lewy – 1/4 ciężaru. Siły poziome (tarcia) są równe, przy czym prawa była dotąd siłą tarcia kinetycznego, a lewa osiągnęła maksymalną wartość siły tarcia statycznego. Zatem współczynniki tarcia spełniają związek $3f_{\mathrm{k}} = f_{\mathrm{s}}$.

469. Zgodnie ze wskazówką ciśnienie wewnątrz bańki jest równe $p = p_{\mathrm{atm}} + \sigma/r$. Różniczkując równanie Clapeyrona, otrzymujemy

$$\left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{\sigma}{r}\right)\mathrm{d}V - \frac{\sigma}{r^2}V\mathrm{d}r = nR\mathrm{d}T.$$

Podstawienie $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ i $\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}V}{4\pi r^2}$ prowadzi do prostszej postaci

$$\left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{2\sigma}{3r}\right)\mathrm{d}V = nR\mathrm{d}T.$$

Postępujemy w sposób analogiczny do zwykłego wyprowadzenia zależności między ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu a ciepłem molowym przy stałej objętości, tzn. opieramy się na I zasadzie termodynamiki, w której przyrost energii wewnętrznej i praca są dane wyrażeniami $\mathrm{d}U = nC_{\mathrm{V}}\mathrm{d}T$, $W = -p\mathrm{d}V$. Do równania $Q = nC_{\mathrm{V}}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$ należy podstawić znaleziony wyżej związek między $\mathrm{d}V$ a $\mathrm{d}T$, co daje rezultat

$$Q = nC_{\mathrm{V}}\mathrm{d}T + \frac{p_{\mathrm{atm}} + \frac{\sigma}{r}}{p_{\mathrm{atm}} + \frac{2\sigma}{3r}}nR\mathrm{d}T.$$

Ciepło molowe C jest ilorazem Q przez $n\mathrm{d}T$, więc słuszność tezy jest widoczna.

Klub 44

$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\!\Sigma!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2009

Zadania z matematyki nr 579, 580

Redaguje Marcin E. KUCZMA

579. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których suma $1+2+\ldots+n$ jest dzielnikiem iloczynu $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

580. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(x+f(y+z))+f(y+f(z+x))+f(z+f(x+y))=0$$

dla $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Zadanie 580 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Rybnika.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2008

Przypominamy treść zadań:

571. Na jednym polu nieskończonej szachownicy (wypełniającej całą płaszczyznę) stoi pionek, pozostałe pola są wolne. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy pole, zajęte przez pionek i sąsiadujące (mające boki wspólne) z co najmniej dwoma polami wolnymi; usuwamy pionek z wybranego pola i stawiamy pionki na dowolnych dwóch wolnych polach sąsiednich. Wykazać, że istnieje taki skończony zbiór pól Z, że po dowolnej liczbie wykonanych ruchów co najmniej jedno z pól zbioru Z będzie zajęte. Podać przykład takiego zbioru; im mniej pól w zbiorze Z, tym lepsze rozwiązanie.

572. Czy istnieją liczby naturalne a, d względnie pierwsze, $d>a>1$, takie, że dla każdej liczby naturalnej k można znaleźć liczbę naturalną n, dla której $a+nd$ jest k-tą potęgą liczby naturalnej?

571. Numerujemy rzędy poziome oraz rzędy pionowe kolejnymi liczbami całkowitymi. Każde pole zostało oznaczone parą liczb całkowitych. Przyjmijmy, że pionek w pozycji startowej stoi na polu $(0,0)$.

Wagą pola (i,j) będziemy nazywać liczbę $2^{-|i|-|j|}$. Waga zbioru pól – to suma wag wszystkich pól w tym zbiorze. Waga rzędu poziomego, przechodzącego przez $(0,0)$, wynosi $1+2\big(\frac12+\frac14+\frac18+\ldots\big)=3$. Waga każdego z przyległych doń rzędów poziomych jest dwukrotnie mniejsza; itd. Waga całej szachownicy wynosi $3+3\cdot 2\big(\frac12+\frac14+\frac18+\ldots\big)=9$.

Weźmy pod uwagę zbiór pól zajętych przez pionki po n-tym ruchu. Jeśli usunięty w $(n+1)$-ym ruchu pionek stoi na polu (i,j), to każdy z dwóch nowych pionków zostanie postawiony na jednym z czterech pól $(i\pm1,j)$, $(i,j\pm1)$. Waga każdego z tych pól jest niemniejsza niż połowa wagi pola (i,j). Zatem waga zbioru pól zajętych przez pionki nie zmniejszy się i w każdym momencie będzie równa co najmniej 1 (bo taka była waga pola $(0,0)$, zajętego w chwili początkowej).

Niech Z będzie dowolnym skończonym zbiorem pól, którego waga wynosi co najmniej 8. Cała reszta szachownicy ma wagę niewiększą niż 1 i w żadnym momencie nie jest całkowicie wypełniona pionkami (które przecież zajmują tylko skończenie wiele pól). Tak więc w każdym momencie łączna waga zajętych pól poza zbiorem Z jest mniejsza od 1; a to znaczy, że co najmniej jedno pole zbioru Z jest zajęte.

Na całej szachownicy mamy jedno pole o wadze 1, cztery pola o wadze 1/2, osiem pól o wadze 1/4, dwanaście pól o wadze 1/8, itd.; $4n$ pól o wadze 2^{-n} dla $n\geqslant 1$. Skończony zbiór Z o wadze równej 8 możemy uzyskać, biorąc wszystkie pola o wagach równych co najmniej 1/16 oraz szesnaście pól o wadze 1/32 (dowolnie wybranych spośród dwudziestu takich pól):

$$1+4\cdot\frac12+8\cdot\frac14+12\cdot\frac18+16\cdot\frac1{16}+16\cdot\frac1{32}=8.$$

Tak określony zbiór Z liczy 57 pól i spełnia postawiony warunek.

572. Przypuśćmy, że a, d są liczbami o podanych własnościach. Weźmy $k=\varphi(d)$, gdzie φ jest funkcją Eulera. W myśl postulowanego warunku istnieją takie liczby naturalne n oraz x, że $a+nd=x^k$. Liczba d jest względnie pierwsza z liczbą a (warunek zadania), więc i z liczbą x. Zatem na mocy twierdzenia Eulera

$$a+nd=x^k=x^{\varphi(d)}\equiv 1 \pmod d.$$

To znaczy, że dla pewnej liczby naturalnej m zachodzi równość $a+nd=1+md$. Skoro zaś $a>1$, to $m>n$. Otrzymujemy

$$a-1=(m-n)d\geqslant d,$$

wbrew założeniu, że $a<d$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że takie liczby a, d nie istnieją.