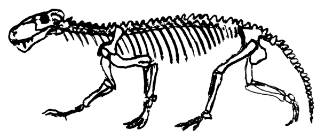
Hipoteza Kemnitza

Michał KIEZA[*]



Punkt kratowy to punkt o obu współrzędnych całkowitych.

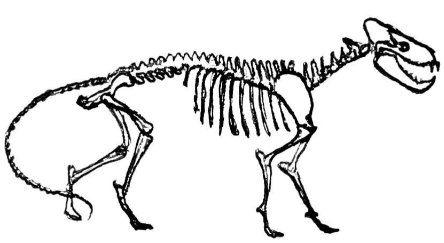
W 1961 roku Erdős, Ginzburg i Ziv udowodnili, że spośród dowolnych $2n-1$ liczb całkowitych można wybrać n takich, których suma dzieli się przez n. W tym artykule zajmiemy się pewnym uogólnieniem tego twierdzenia. Rozpatrzymy sytuację dwuwymiarową. Dla ustalonej wartości n chcemy znaleźć taką najmniejszą liczbę m, że wśród dowolnych m punktów kratowych na płaszczyźnie istnieje n punktów, których suma na każdej współrzędnej jest podzielna przez n. Przyjmujemy, że wyróżniony układ m punktów kratowych może zawierać powtórzenia, czyli nie jest to zbiór, tylko *multizbiór* punktów.

Nietrudno zauważyć, że $m \geqslant 4n-3$, gdyż dla $m = 4n-4$ jako kontrprzykład można wziąć wierzchołki kwadratu jednostkowego, każdy z krotnością $n-1$. W 1983 roku Arnfried Kemnitz postawił hipotezę, że $m = 4n-3$. Pierwszy znaczący wynik pojawił się w 1995 roku: Alon i Dubiner udowodnili, że wystarcza $6n-5$. Wynik ten został poprawiony przez Rónyai w 2000 roku: jeśli p jest liczbą pierwszą, to wystarcza $4p-2$. Wreszcie jesienią 2003 roku, 20 lat po sformułowaniu hipotezy Kemnitza, Reiher i di Fiore niezależnie podali jej dowód. Reiher miał wtedy 19 lat, w lipcu tego samego roku zdobył złoty medal na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Tokio.

Ponieważ pełny dowód zająłby zbyt wiele miejsca, ograniczymy się do podania kilku lematów, każdy opatrując krótką wskazówką, i do wyprowadzenia z nich hipotezy Kemnitza. Kompletny dowód znajduje się w [2], ale zachęcamy Czytelników do samodzielnego zmierzenia się z lematami!

Rozpocznijmy od spostrzeżenia, że jeśli hipoteza jest prawdziwa dla liczb a i b, to jest również prawdziwa dla ich iloczynu. Istotnie, z założenia spośród $4ab-3$ punktów kratowych możemy wybrać a takich, których suma ma obie współrzędne podzielne przez a. Pozostają $4a(b-1)-3$ punkty, więc możemy wybrać następne a punktów spełniających warunek zadania, i tak postępujemy $4b-3$ razy. Utworzyliśmy więc $4b-3$ grup po a punktów. Oznaczmy sumy punktów w grupach odpowiednio przez $a\cdot(X_1,Y_1), a\cdot(X_2,Y_2),\ldots,a\cdot(X_{4b-3},Y_{4b-3})$. Ponieważ założyliśmy, że hipoteza jest prawdziwa dla b, więc spośród punktów $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_{4b-3},Y_{4b-3})$ wybieramy b tak, aby suma na każdej współrzędnej dzieliła się przez b. W ten sposób wyróżniliśmy b grup. Wszystkie punkty tych grup tworzą szukany układ ab punktów, których suma na każdej współrzędnej dzieli się przez ab. Wobec tego wystarczy udowodnić hipotezę Kemnitza dla n będącego liczbą pierwszą.

Przypadek $p=2$ jest prosty: wśród pięciu punktów kratowych istnieją dwa takie, które dają te same reszty z dzielenia przez 2 na obu współrzędnych. Wówczas ich suma ma wszystkie współrzędne parzyste.



Ustalmy więc liczbę pierwszą $p \neq 2$. Przez $(n|X)$ będziemy oznaczać liczbę takich n-elementowych multipodzbiorów multizbioru X, których suma elementów na każdej współrzędnej jest podzielna przez p. Naszym celem będzie udowodnienie kilku kongruencji związanych z tymi symbolami i wywnioskowanie z nich, że $(p|X) \neq 0$. Tak naprawdę udowodnimy nawet, że, dla X mających $4p-3$ elementy, $(p|X) \not\equiv 0 \bmod p$. Wszystkie kongruencje brane są modulo p. Przez J i X oznaczamy dalej pewne multizbiory punktów kratowych na płaszczyźnie.

Twierdzenie Chevalleya–Warninga. *Niech $P_1, P_2, \ldots, P_m \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ będą wielomianami od n zmiennych nad ciałem skończonym F o charakterystyce p. Załóżmy, że suma ich stopni jest mniejsza niż n. Wówczas liczba ich wspólnych zer w F^n jest podzielna przez p.*

Lemat 1. *Jeśli $|J| = 3p-3$, to*

$$1-(p-1|J)-(p|J)+(2p-1|J)+(2p|J) \equiv 0.$$

Wskazówka: Należy rozważyć następujące wielomiany nad $\mathbb{Z}_p$ (przez a_i, b_i oznaczamy współrzędne punktów w multizbiorze J, brane modulo p):

$$\sum_{i=1}^{3p-3} x_i^{p-1} + x_{3p-2}^{p-1}, \qquad \sum_{i=1}^{3p-3} a_i x_i^{p-1}, \qquad \sum_{i=1}^{3p-3} b_i x_i^{p-1}.$$

Następnie trzeba skorzystać z twierdzenia Chevalleya–Warninga.

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Lemat 2. *Jeśli* $|J| = 3p - 2$ *lub* $3p - 1$, *to* $1 - (p|J) + (2p|J) \equiv 0$.

Wskazówka: Rozumowanie jest podobne do tego w dowodzie lematu 1.

Stąd natychmiast otrzymujemy:

Lemat 3. *Jeśli* $|J| = 3p - 2$ *lub* $3p - 1$ *oraz* $(p|J) = 0$, *to* $(2p|J) \equiv -1$.

Lemat 4 (Alon, Dubiner). *Jeśli multizbiór* J *zawiera* $3p$ *elementów oraz ich suma na każdej współrzędnej dzieli się przez* p, *to* $(p|J) > 0$.

Można również zastosować metodę opisaną przez Czesława Bagińskiego i Edmunda Puczyłowskiego w *Delcie* 9/2008, za G biorąc tym razem jednomiany trzech zmiennych, a nie dwóch.

Wskazówka: Należy założyć, że tak nie jest, i rozważyć multizbiór J z wyrzuconym jednym elementem, a następnie skorzystać z lematu 3.

Lemat 5. *Jeśli* $|X| = 4p - 3$, *to*

$$-1 + (p|X) - (2p|X) + (3p|X) \equiv 0, \tag{1}$$

$$(p-1|X) - (2p-1|X) + (3p-1|X) \equiv 0. \tag{2}$$

Wskazówka: Znów podobnie jak w dowodzie lematu 1.

Lemat 6. *Jeśli* $|X| = 4p - 3$, *to*

$$3 - 2(p-1|X) - 2(p|X) + (2p-1|X) + (2p|X) \equiv 0.$$

Wskazówka: Trzeba przesumować kongruencje z lematu 1 po wszystkich $(3p-3)$-elementowych multipodzbiorach multizbioru X.

Lemat 7 (Reiher). *Jeśli* $|X| = 4p - 3$ *oraz* $(p|X) = 0$, *to*

$$(p-1|X) \equiv (3p-1|X).$$

Wskazówka: Rozważmy podziały multizbioru X na takie multizbiory A, B, C, że $|A| = p - 1$, $|B| = p - 2$, $|C| = 2p$ oraz

$$\sum_{a \in A} a \equiv (0,0), \qquad \sum_{b \in B} b \equiv \sum_{x \in X} x, \qquad \sum_{c \in C} c \equiv (0,0).$$

Należy obliczyć liczbę tych podziałów modulo p na dwa sposoby: za pierwszym razem wybieramy multizbiór A, a potem C, a za drugim razem najpierw wybieramy multizbiór B, a potem C. Przyda się również lemat 3.

Dowód hipotezy Kemnitza. Przypuśćmy, że $(p|X) = 0$. Dodając stronami kongruencje (1), (2) i kongruencję z lematu 6 oraz uwzględniając lemat 7, dostajemy $2 - (p|X) + (3p|X) \equiv 0$. Ponieważ przyjęliśmy, że $p \neq 2$, więc $(p|X) = 0$ wymusza $(3p|X) > 0$, ale z lematu 4 wynika wtedy, że $(p|X) > 0$, czyli otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Z powyższego dowodu płyną dwa morały. Pierwszy – nawet świeżo upieczeni studenci mogą rozwiązać otwarty wiele lat temu problem. Drugi – jak potężne w kombinatorycznej teorii liczb jest połączenie metod algebraicznych z kombinatorycznymi.

Niech teraz $f(n,d)$ oznacza taką minimalną liczbę, że w dowolnym multizbiorze $f(n,d)$ punktów w $\mathbb{Z}^d$ istnieje n takich, że ich suma ma wszystkie współrzędne podzielne przez n. Wiadomo, że $f(n,1) = 2n-1$ i $f(n,2) = 4n-3$. Dla $d \geqslant 3$ problem jest otwarty. Nietrudno zauważyć, że $f(n,d) \geqslant 2^d(n-1)+1$: wystarczy wziąć wierzchołki n-wymiarowej kostki jednostkowej, każdy $n-1$ razy. Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, łatwo wykazać, że $f(2,d) = 2^d + 1$ i z multiplikatywności dostaniemy $f(2^k,d) = 2^d(2^k-1)+1$. Co jednak zrobić w przypadku innych wartości n?

Przyjrzyjmy się bliżej wymiarowi 3. Tutaj nasze oszacowanie daje $f(n,3) \geqslant 8n-7$. Patrząc na zależności dla wymiarów 1 i 2, chcielibyśmy udowodnić, że $f(n,3) = 8n-7$. I tu czeka nas niespodzianka: w 1982 r. Brenner wykazał, że $f(3,3) = 19 > 17 = 8 \cdot 3 - 7$. Kilka lat temu Elsholtz uogólnił ten wynik na wszystkie n nieparzyste, dowodząc, że $f(n,3) \geqslant 9n-8$. Pełny dowód znajduje się w [1]. Powiedzmy tylko, że wystarczy wziąć $n-1$ kopii zbioru dziewięciu punktów

$$\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

i wykazać, że nie da się wybrać n punktów tak, by suma dzieliła się przez n na każdej współrzędnej. Wielu specjalistów w tej dziedzinie podejrzewa, że $f(n,3) = 9n-8$ dla n nieparzystych, ale dowodu, jak na razie, nie ma...

Literatura

[1] C. Elsholtz, *Lower bounds for multidimensional zero sums*, Combinatorica 24 (2004).

[2] C. Reiher, *On Kemnitz' conjecture concerning lattice-points in the plane*, The Ramanujan Journal 13 (2007).