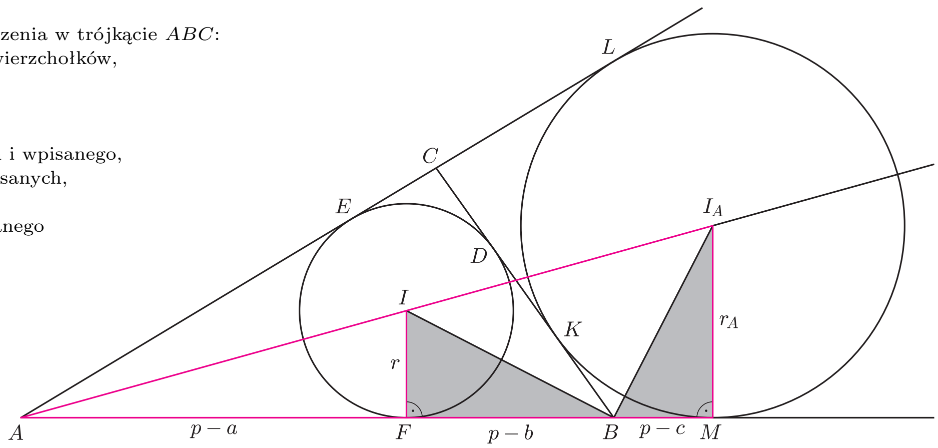
Dziesięć wzorów na pole trójkąta

Joanna JASZUŃSKA

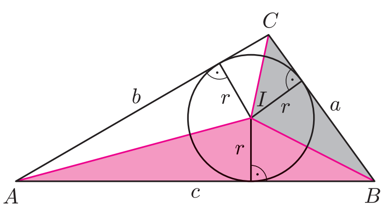
Najpopularniejszym chyba wzorem na pole trójkąta jest $S = \frac{1}{2}ah_A$. Zarazem wiadomo, że długości boków jednoznacznie wyznaczają trójkąt. Powinny zatem wyznaczać też jego pole. I wyznaczają, a wyraża to *wzór Herona*. Wyprowadzimy go, a przy okazji też kilka innych wzorów.

Przyjmijmy następujące standardowe oznaczenia w trójkącie ABC:
- a, b, c – boki naprzeciwko odpowiednich wierzchołków,
- $2p = a + b + c$ – obwód,
- S – pole,
- h_A, h_B, h_C – wysokości,
- I_A, I_B, I_C, I – środki okręgów dopisanych i wpisanego,
- r_A, r_B, r_C, r, R – promienie okręgów dopisanych, wpisanego i opisanego,
- D, E, F – punkty styczności okręgu wpisanego z bokami a, b, c,
- K, L, M – punkty styczności okręgu dopisanego do kąta BAC z prostymi BC, AC, AB.



Rys. 1

Najmocniejsze twierdzenie geometrii głosi, że dwa odcinki stycznych do okręgu, poprowadzone z jednego punktu, są równej długości, czyli na przykład: $AF = AE$, $BF = BD$ oraz $CE = CD$. Wobec tego $BF + CE = BD + CD = a$, czyli $2AF = AF + AE = 2p - (BF + CE + BC) = 2p - 2a$. Stąd $AF = AE = p - a$ i analogicznie $BF = BD = p - b$ oraz $CE = CD = p - c$.



Rys. 2

Skoro $AM = p$, to $AB + BK = p$, czyli punkt styczności okręgu dopisanego dzieli obwód trójkąta na połowy.

Podobnie $AM = AL$, $BM = BK$ oraz $CL = CK$, więc
$$2AM = AM + AL = (AB + BK) + (AC + CK) = 2p.$$
Stąd $AM = p = AL$ oraz $BM = AM - AB = p - c$.

Ufff... Pora przystąpić do zapowiedzianych wzorów na pole trójkąta. Zacznijmy od najprostszego. Z rysunku 2 wynika wzór $S = pr$, bo
$$S = P_{\triangle BCI} + P_{\triangle CAI} + P_{\triangle ABI} = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = pr.$$
Wróćmy do rysunku 1. Mamy $\triangle AMI_A \sim \triangle AFI$, bo $\sphericalangle MAI_A = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle FAI$ oraz $I_AM \perp AB \perp IF$. Zatem
$$\frac{r_A}{r} = \frac{I_AM}{IF} = \frac{AM}{AF} = \frac{p}{p-a}, \text{ czyli } r_A = \frac{pr}{p-a}$$
i analogicznie dla r_B i r_C. Skoro $S = pr$, to otrzymujemy
$$S = r_A(p-a) = r_B(p-b) = r_C(p-c).$$
Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe (proszę sprawdzić!), więc $BI_A \perp IB$. Jednocześnie $BM \perp IF$ oraz $I_AM \perp BF$, stąd $\triangle I_ABM \sim \triangle BIF$. Zatem
$$\frac{r_A}{p-b} = \frac{I_AM}{BF} = \frac{BM}{IF} = \frac{p-c}{r}, \text{ czyli } r_A = \frac{(p-b)(p-c)}{r}$$
i analogicznie dla r_B i r_C. Podstawiając ten wzór do $pr = S = r_A(p-a)$, otrzymujemy $pr = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r}$.

Pomnożenie obu stron przez pr i spierwiastkowanie daje
$$\text{wzór Herona:} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
Wzór ten rzeczywiście pozwala wyznaczyć pole, gdy znamy tylko długości boków – wszak $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Z wyprowadzonych powyżej wzorów niemalże natychmiast wynikają kolejne. Na przykład, mnożąc stronami równości
$$r_B = \frac{pr}{p-b},\ r_C = \frac{pr}{p-c} \text{ oraz } r_A = \frac{(p-b)(p-c)}{r}$$
i korzystając z $S = pr$, otrzymujemy $S = \sqrt{rr_Ar_Br_C}$.

Podobnie można wywnioskować (proszę spróbować!), że:
$$FM = BC \text{ oraz } BK = CD,$$
$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r},$$
$$r_Ar_B + r_Br_C + r_Cr_A = p^2,$$
$$S = \frac{ar_Br_C}{r_B + r_C} \text{ oraz } S = \frac{arr_A}{r_A - r}.$$

Oczywiście to nie koniec, istnieje wiele innych wzorów na pole trójkąta. Nietrudno, na przykład, sprawdzić, że $h_A = c \sin B$. Stąd uzyskujemy
$$S = \tfrac{1}{2}ah_A = \tfrac{1}{2}ac \sin B.$$
Twierdzenie sinusów głosi, że
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$
Skoro $S = \frac{1}{2}ac \sin B$, otrzymujemy
$$S = \frac{1}{2}ac\frac{b}{2R} = \frac{abc}{4R}$$
oraz $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Z powyższych wzorów można też udowodnić, na przykład, że
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr},$$
a także że średnica okręgu wpisanego nie przekracza promienia okręgu opisanego, czyli $2r \leqslant R$. Można również wyprowadzić wzory na r, R, r_A i h_A zależne wyłącznie od a, b i c.

Zachęcam do odkrywania dalszych wzorów na pole trójkąta i ciekawych faktów z nimi związanych!