Niech $S_i = \{0, 1, \ldots, n_i\}$, dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Wówczas $|S_i| = n_i + 1 > n_i$ oraz $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$. Możemy więc skorzystać z *Combinatorial Nullstellensatz* dla $t_i = n_i$ oraz uprzednio zdefiniowanych S_i. Wnosimy, że istnieje taki punkt $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, dla którego $P(c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności tezy. $\square$

Okazuje się, że otrzymane oszacowanie jest optymalne. Aby to wykazać, wystarczy rozważyć zbiór $n_1 + \ldots + n_k$ hiperpłaszczyzn o równaniach $x_i = j$, dla $j = 1, 2, \ldots, n_i$ oraz $i = 1, 2, \ldots, k$.

W podobny sposób możemy udowodnić nieco ogólniejsze twierdzenie, w którym wyłączany punkt jest dowolnym punktem kratowym k-hiperprostopadłościanu (niekoniecznie wierzchołkiem). Dowód różni się od powyższego nieco bardziej skomplikowaną postacią konstruowanego wielomianu.

Powyższe twierdzenie daje także optymalne oszacowania dla kilku innych problemów, które rozważałem w mojej pracy. Dotyczyły one analogicznego pokrycia hiperpłaszczyznami punktów kratowych k-wymiarowej kostki, a także k-hiperprostopadłościanu z wyłączeniem dwóch przeciwległych wierzchołków lub wszystkich wierzchołków.

Warto także zastanowić się nad minimalną liczbą hiperpłaszczyzn potrzebnych do pokrycia wszystkich punktów kratowych kostki $\{0, 1, \ldots, n\}^k$ z wyłączeniem wszystkich punktów znajdujących się na jednej z głównych przekątnych. Udało mi się uzyskać wyniki tylko dla kwadratu, tj. przypadku dwuwymiarowego. Może Czytelnik spróbuje rozwiązać ten problem?

Zadania

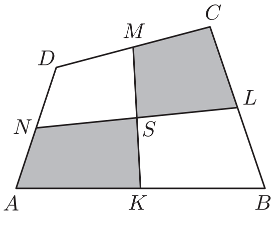
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 735. Promień światła pada pod kątem α na stos płaskich przezroczystych płytek jednakowej grubości. Współczynnik załamania każdej z nich jest k razy mniejszy niż poprzedniej. Dla jakiego najmniejszego kąta padania promień nie przejdzie przez stos N płytek? Współczynnik załamania wierzchniej płytki wynosi n.
Rozwiązanie na str. 12

F 736. W ośrodku o współczynniku załamania $n = 1{,}3$ rozchodzi się wąska równoległa wiązka świetlna o przekroju kołowym. Wiązka ta pada centralnie na wydrążenie sferyczne o promieniu dużo większym od promienia przekroju wiązki. Ile razy szersza będzie wiązka po przejściu przez wydrążenie?
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1234. Do pokrycia pewnego prostokąta zużyto k kwadratów 2×2 oraz m prostokątów o wymiarach 1×4. Żadne dwie pokrywające figury nie nakładają się ani nie wystają na zewnątrz prostokąta. Udowodnić, że tego samego prostokąta nie da się pokryć, używając $k - 1$ kwadratów wymiaru 2×2 oraz $m + 1$ prostokątów o wymiarach 1×4.
Rozwiązanie na str. 20



M 1235. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S (rysunek). Wykazać, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa sumie pól czworokątów $KBLS$ i $NSMD$.
Rozwiązanie na str. 19

M 1236. Dana jest taka liczba naturalna $n \geqslant 4$, dla której liczba $n + 1$ jest podzielna przez $[\sqrt{n}\,] + 1$. Dowieść, że liczba $(n-1)(n-3)$ jest podzielna przez $[\sqrt{n}\,] - 1$.
Uwaga: $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od a.
Rozwiązanie na str. 24