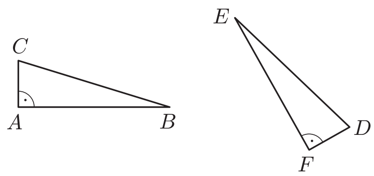
Wprowadzenie do zgrubnej geometrii

Michał SKRZYPCZAK[*]

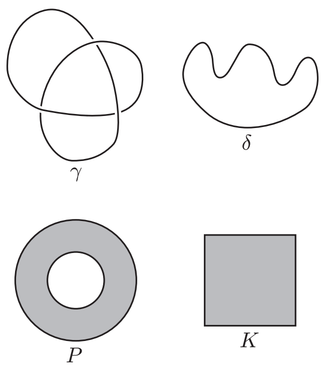


Rys. 1. Już dzieci w podstawówce wiedzą, że trójkąty ABC, DEF są „takie same".

Na geometrię można patrzeć jak na dziedzinę badającą różnorodne przestrzenie metryczne. Podczas takich badań jedno z fundamentalnych zagadnień to pytanie, jakie obiekty uważamy za „takie same".

Powszechnie przyjęte jest, że figury *izometryczne* są takie same. Mówimy, że dwa zbiory A, B są izometryczne, gdy istnieje funkcja zachowująca odległość, przeprowadzająca A na B.

Często również figury podobne uznaje się za jednakowe. Standardowy przykład to litera A pisana przez panią nauczycielkę na tablicy i literki A pisane w zeszytach dzieci.



Rys. 2. Z topologicznego punktu widzenia krzywe γ i δ są jednakowe, ale pierścień P i kwadrat K już nie.

Zarówno izometryczność, jak i podobieństwo odnoszą się do kształtu figury (jej rozmiarów, proporcji, kątów, ...). Topologia podchodzi do figur w bardziej ogólny sposób. Dwie figury (zbiory) A, B są homeomorficzne, jeśli istnieje takie przekształcenie ciągłe A na B, że przekształcenie odwrotne B na A też jest ciągłe. Na przykład, jeden zbiór można przekształcić na drugi poprzez rozciąganie i ściskanie, dopuszczalne jest też rozcinanie, byle tylko skleić potem „tak samo". Można sobie wyobrazić, że zbiory są wykonane z gumy. Odcinek otwarty $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ jest homeomorficzny z prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$, intuicyjnie – wystarczy go rozciągnąć do nieskończoności.

Zgrubna geometria to kolejny sposób patrzenia na przestrzenie metryczne. Sposób ten różni się bardzo istotnie od poprzednio podanych. Nie jest ważny dokładny kształt figury, czy jest ona gruba czy cienka, czy jest w jednym kawałku czy nie. Istotne jest, jak figura wygląda „z bardzo daleka". Ze zgrubnego punktu widzenia wszystkie zbiory ograniczone są równoważne (w szczególności każde dwa trójkąty są jednakowe). Natomiast zbiór ograniczony nigdy nie jest równoważny zbiorowi nieograniczonemu, między innymi odcinek nie może być zgrubnie równoważny prostej.

W dalszej części artykułu precyzyjniej opiszemy powyższe intuicje.

Aparat zgrubnej geometrii pozwala badać dowolne przestrzenie metryczne i nie tylko. W tym artykule dla uproszczenia ograniczę się tylko do przestrzeni będących podzbiorami przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Odległość dwóch punktów $a, b \in \mathbb{R}^n$ oznaczać będę $d(a,b)$. Na przykład dla $n=2, a=(x_1,y_1), b=(x_2,y_2)$ mamy

$$d(a,b) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Zdefiniujmy kilka rodzajów funkcji o specyficznych własnościach.

Zbiór B jest ograniczony, gdy jest zawarty w pewnej kuli. Na przykład, każdy sześcian jest ograniczony, natomiast żadna prosta nie jest.

Definicja 1. Dla $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcji $f : X \to Y$, mówimy, że f jest

- *metrycznie właściwa* (*ang. proper*), *gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych są ograniczone;*
  czyli gdy dla każdego zbioru ograniczonego $B \subseteq Y$ zbiór
  $$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$
  jest ograniczony.
- *bornologiczna* (*ang. bornologous*), *jeśli*
  $$\forall_{R>0} \exists_{S>0} \forall_{x,y \in X}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S;$$
  czyli dla każdego $R > 0$ można szacować, jak bardzo oddalone będą obrazy dowolnych dwóch punktów odległych o mniej niż R.
- *zgrubna* (*ang. coarse*), *jeśli spełnia obie powyższe własności.*

Chodzi nam o to, by funkcje zgrubne zachowywały globalny kształt przestrzeni widzianej z dalekiej perspektywy. W związku z tym nie powinny jej za bardzo zgniatać (metryczna właściwość) ani przesadnie rozciągać w żadnym kierunku (bornologiczność).

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Oczywiście, dla każdego zbioru X, $\mathrm{id}_X(x) = x$ jest funkcją zgrubną. Ponadto złożenie funkcji zgrubnych też jest zgrubne.

Pora na kilka przykładów.

Rys. 3. Prosta rzeczywista $\mathbb{R}$ i liczby całkowite $\mathbb{Z}$ widziane z daleka.

- Niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nie jest ani właściwa, ani bornologiczna. Po pierwsze, $f^{-1}((0,1]) = [1,\infty)$, więc f nie jest właściwa. Po drugie, dla $R = 1$ nie może istnieć takie $S > 0$, że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}_+} d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$. Gdyby takie S istniało, to dla $x = 1$, $y = \frac{1}{2S+1}$ byłoby $d(x,y) < R$ oraz $d(1, 2S+1) = 2S > S$ – sprzeczność.
- Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stale równa 1 nie jest właściwa ($f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{N}$), ale jest bornologiczna, bo niezależnie od $R > 0, S > 0, x, y$, mamy $d(f(x), f(y)) = d(1,1) = 0 < S$.
- $f(n) = n^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest właściwa (zbiory ograniczone w $\mathbb{N}$ są skończone), ale nie bornologiczna. Gdyby f była bornologiczna, to w szczególności dla $R = 2$ istniałoby takie $S > 0$, że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}_+} d(x,y) < 2 \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$. Wtedy dla $x = S$, $y = S+1$ mamy $d(x,y) = 1 < R$, a jednocześnie $d(f(x), f(y)) = d(S^2, S^2 + 2S + 1) = 2S + 1 > S$ – sprzeczność.
- Funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ z prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ w liczby całkowite $\mathbb{Z}$ jest zgrubna ($\lfloor x \rfloor$ to „podłoga x”, czyli największa liczba całkowita mniejsza lub równa x). Proponuję to wykazać.

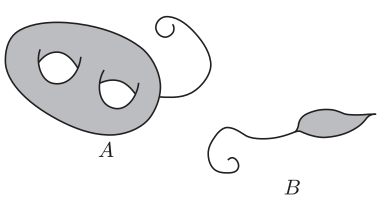
Definicja 2. *Dla danych zbiorów $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, przekształcenia $f, g : X \to Y$ nazywamy bliskimi (ang. close), gdy zbiór*

$$\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

jest ograniczony.

Jeśli dwie funkcje spełniają powyższą definicję, to – gdy patrzymy na nie z dostatecznie daleka – wydają się być jednym i tym samym przekształceniem.

Przykładowo, jeśli przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ przemieszcza każdy punkt $x \in \mathbb{R}^n$ o co najwyżej 100, to $\{d(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq [0, 100]$, więc f jest bliska $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Oczywiście, 100 można zastąpić dowolną ustaloną liczbą.



Rys. 4. Zbiory A, B są ograniczone, więc zgrubnie równoważne.

Definicja 3. *Dwa zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent), gdy istnieją takie funkcje zgrubne $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$, że ich złożenia są bliskie identycznościom ($f \circ g$ bliskie id_Y oraz $g \circ f$ bliskie id_X).*

Udowodnimy, że dowolne dwa niepuste zbiory ograniczone $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne. Niech funkcje $f : B \to C$, $g : C \to B$ będą funkcjami stałymi (przyjmującymi po jednej wartości). Jak łatwo sprawdzić, funkcje te są zgrubne, bo zbiory B i C są ograniczone. Ponadto złożenia $f \circ g$, $g \circ f$ to funkcje stałe, a skoro B jest ograniczony, to każda funkcja stała $B \to B$ jest bliska id_B (analogicznie z C). Więc B i C są zgrubnie równoważne.

Fakt 1. *Jeśli dane są funkcje zgrubne $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to funkcja*

$$f \times g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

powstająca przez stosowanie f i g „po współrzędnych”, też jest zgrubna.

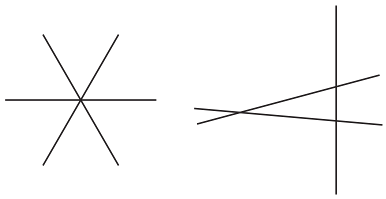
$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$

Warto spróbować samodzielnie wykazać powyższy fakt.

Fakt 2. *Przestrzenie $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne dla $n = 1, 2, \ldots$.*

Dowód. Ustalmy n. Rozważmy $f(x_1, \ldots, x_n) = (\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$ oraz $g(z) = z : \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Funkcja f jest zgrubna, gdyż jest zastosowaniem funkcji zgrubnej $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ „po współrzędnych”. Funkcja g jest izometrią (zachowuje odległości punktów), więc oczywiście jest zgrubna. Ponadto $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}$, więc $f \circ g$ jest bliskie $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}$. Z drugiej strony $g \circ f$ przesuwa każdy punkt o mniej niż $d((0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)) = \sqrt{n}$, więc jest bliskie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Przestrzenie $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, dla $n \neq m$, nie są zgrubnie równoważne, jednak dowód tego jest dalece nietrywialny, wykorzystuje pojęcie *wymiaru asymptotycznego* – zgrubnej wersji definicji wymiaru. Fakt ten oznacza, między innymi, że prosta i płaszczyzna nie są zgrubnie równoważne. Odpowiada to intuicji mówiącej o patrzeniu na przestrzeń „z bardzo daleka”: niezależnie z jak daleka spojrzymy na prostą, zawsze jest ona „cienka”, natomiast płaszczyzna zawsze jest „szeroka”.



Rys. 5. *3-gwiazdka* i inne trzy parami nierównoległe proste są zgrubnie równoważne.

Pora na kilka ciekawych faktów.

Fakt 3. *Niezależnie od tego, jak położymy na płaszczyźnie trzy proste (jeśli tylko żadne dwie z nich nie będą równoległe), zbiór punktów tych prostych jest zgrubnie równoważny 3-gwiazdce.*

Powyższy fakt pozostaje prawdziwy, gdy zamiast prostych rozważymy pasy ustalonej szerokości oraz gdy przejdziemy z $\mathbb{R}^2$ do dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto zamiast trzech prostych i *3-gwiazdki*, możemy rozważać dowolne k parami nierównoległych prostych i *k-gwiazdkę*.

Warto zwrócić uwagę, że w powyższym fakcie zgrubna równoważność jest rozumiana szerzej niż w dotychczas przekazywanej intuicji. Zbiory zgrubnie równoważne mogą wyglądać nieco inaczej nawet z dalekiej perspektywy, byle tylko miały podobny globalny kształt.

Ze zgrubnego punktu widzenia ograniczone zaburzenia danego zbioru są nieistotne. Mówi o tym poniższy fakt.

Fakt 4. *Dla dowolnego nieograniczonego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dowolnej kuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz zbioru $B \subseteq K$ zbiory X oraz $(X \setminus K) \cup B$ są zgrubnie równoważne.*

Konsekwencją powyższego faktu jest stwierdzenie, że płaszczyzna oraz płaszczyzna z wyciętą kulą (kołem) np. o promieniu 10^{16} są zgrubnie równoważne.

Kolejną operacją na zbiorze, która nie wpływa na jego zgrubne własności, jest „powiększanie punktów”. Zamiast każdego punktu zbioru wstawiamy dowolny niepusty i ograniczony zbiór. Ściślej jest to sformułowane poniżej.

Fakt 5. *Rozważmy dowolne $R > 0$, dowolny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz rodzinę zbiorów $\{B_x\}_{x \in X}$ – po jednym zbiorze dla każdego punktu w X. Załóżmy, że po pierwsze, dla każdego $x \in X$ zbiór B_x jest niepusty, a po wtóre, że $B_x \subseteq K(x, R)$. Wtedy zbiory X oraz $\bigcup_{x \in X} B_x$ są zgrubnie równoważne.*

Przez $K(x, r)$ oznaczam kulę o środku x i promieniu r.

Zastosujmy ten fakt dla $R = 1$, X będącego prostą oraz zbiorów $B_x = K(x, 1)$. Wtedy założenia są spełnione, a zbiór $\bigcup_{x \in X} B_x$ to pas o szerokości dwa. Dowodzi to, że prosta i pas szerokości dwa są zgrubnie równoważne.

Osobom zainteresowanym zgrubną geometrią polecam książkę [1]. Ponadto pewnym rozszerzeniem powyższego artykułu są referaty [2].

Literatura

[1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003).

[2] M. Skrzypczak, *Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne*, *Wprowadzenie do zgrubnej geometrii*, http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/

Prawa Cassiniego

Gian Domenico Cassini, 1625–1712

Są to trzy prawa ruchu Księżyca, odkryte przezeń obserwacyjnie:

1. Księżyc obraca się wokół stałej w nim osi ze stałą prędkością kątową równą średniej prędkości ruchu orbitalnego – jest to intuicyjnie zrozumiałe jako zasada zachowania momentu pędu przy obrocie bryły sztywnej.
2. Nachylenie księżycowego równika do ekliptyki jest stałe – j.w.
3. Oś obrotu Księżyca, oś orbity Księżyca i oś ekliptyki mają wspólny kierunek prostopadły. Otóż dość skomplikowanym rachunkiem można wykazać, że rzeczywiście tak musi być, ale dla autora tej notatki pozostaje niezgłębioną tajemnicą, jak w XVII w. można było ten fakt zaobserwować. Odkrycie przez Cassiniego czterech satelitów Saturna oraz skomplikowanej budowy jego pierścieni (np. przerwy Cassiniego) czy obrotu Jowisza wydaje się przy tym zupełną błahostką.

T.K.