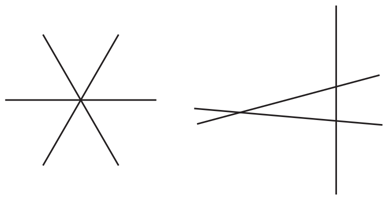
o patrzeniu na przestrzeń „z bardzo daleka”: niezależnie z jak daleka spojrzymy na prostą, zawsze jest ona „cienka”, natomiast płaszczyzna zawsze jest „szeroka”.



Rys. 5. *3-gwiazdka* i inne trzy parami nierównoległe proste są zgrubnie równoważne.

Pora na kilka ciekawych faktów.

Fakt 3. *Niezależnie od tego, jak położymy na płaszczyźnie trzy proste (jeśli tylko żadne dwie z nich nie będą równoległe), zbiór punktów tych prostych jest zgrubnie równoważny 3-gwiazdce.*

Powyższy fakt pozostaje prawdziwy, gdy zamiast prostych rozważymy pasy ustalonej szerokości oraz gdy przejdziemy z $\mathbb{R}^2$ do dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto zamiast trzech prostych i *3-gwiazdki*, możemy rozważać dowolne k parami nierównoległych prostych i *k-gwiazdkę*.

Warto zwrócić uwagę, że w powyższym fakcie zgrubna równoważność jest rozumiana szerzej niż w dotychczas przekazywanej intuicji. Zbiory zgrubnie równoważne mogą wyglądać nieco inaczej nawet z dalekiej perspektywy, byle tylko miały podobny globalny kształt.

Ze zgrubnego punktu widzenia ograniczone zaburzenia danego zbioru są nieistotne. Mówi o tym poniższy fakt.

Fakt 4. *Dla dowolnego nieograniczonego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dowolnej kuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz zbioru $B \subseteq K$ zbiory X oraz $(X \setminus K) \cup B$ są zgrubnie równoważne.*

Konsekwencją powyższego faktu jest stwierdzenie, że płaszczyzna oraz płaszczyzna z wyciętą kulą (kołem) np. o promieniu 10^{16} są zgrubnie równoważne.

Kolejną operacją na zbiorze, która nie wpływa na jego zgrubne własności, jest „powiększanie punktów”. Zamiast każdego punktu zbioru wstawiamy dowolny niepusty i ograniczony zbiór. Ściślej jest to sformułowane poniżej.

Fakt 5. *Rozważmy dowolne $R > 0$, dowolny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz rodzinę zbiorów $\{B_x\}_{x \in X}$ – po jednym zbiorze dla każdego punktu w X. Załóżmy, że po pierwsze, dla każdego $x \in X$ zbiór B_x jest niepusty, a po wtóre, że $B_x \subseteq K(x, R)$. Wtedy zbiory X oraz $\bigcup_{x \in X} B_x$ są zgrubnie równoważne.*

Przez $K(x, r)$ oznaczam kulę o środku x i promieniu r.

Zastosujmy ten fakt dla $R = 1$, X będącego prostą oraz zbiorów $B_x = K(x, 1)$. Wtedy założenia są spełnione, a zbiór $\bigcup_{x \in X} B_x$ to pas o szerokości dwa. Dowodzi to, że prosta i pas szerokości dwa są zgrubnie równoważne.

Osobom zainteresowanym zgrubną geometrią polecam książkę [1]. Ponadto pewnym rozszerzeniem powyższego artykułu są referaty [2].

Literatura

[1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003).

[2] M. Skrzypczak, *Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne*, *Wprowadzenie do zgrubnej geometrii*, http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/

Prawa Cassiniego

Gian Domenico Cassini, 1625–1712

Są to trzy prawa ruchu Księżyca, odkryte przezeń obserwacyjnie:

1. Księżyc obraca się wokół stałej w nim osi ze stałą prędkością kątową równą średniej prędkości ruchu orbitalnego – jest to intuicyjnie zrozumiałe jako zasada zachowania momentu pędu przy obrocie bryły sztywnej.

2. Nachylenie księżycowego równika do ekliptyki jest stałe – j.w.

3. Oś obrotu Księżyca, oś orbity Księżyca i oś ekliptyki mają wspólny kierunek prostopadły. Otóż dość skomplikowanym rachunkiem można wykazać, że rzeczywiście tak musi być, ale dla autora tej notatki pozostaje niezgłębioną tajemnicą, jak w XVII w. można było ten fakt zaobserwować. Odkrycie przez Cassiniego czterech satelitów Saturna oraz skomplikowanej budowy jego pierścieni (np. przerwy Cassiniego) czy obrotu Jowisza wydaje się przy tym zupełną błahostką.

T.K.