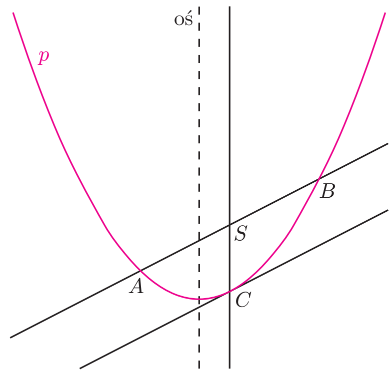
Od własności paraboli do równania funkcyjnego

Tomasz TKOCZ[*]



Tytułowa własność paraboli

Własność, o którą chodzi w tytule, jest następująca:

($*$) *Jeśli S jest środkiem cięciwy AB paraboli p, C zaś – punktem przecięcia paraboli p i prostej równoległej do jej osi przechodzącej przez S, to styczna do paraboli p w punkcie C jest równoległa do jej siecznej AB.*

Tę przyjemną własność znał już Archimedes (wykorzystał ją np. w swojej pracy *Kwadratura paraboli*, obliczając pole odcinka paraboli – por. [2]). Geometryczny dowód powyższego faktu może być bardzo ciekawym i pouczającym zadaniem. Analitycznie zaś możemy próbować rozumować, jak następuje. Niech nasza parabola p będzie wykresem funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Współrzędnymi punktów A i B niech będą odpowiednio $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Wtedy $C=(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, więc wystarczy sprawdzić, że (łatwy rachunek)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad \text{dla dowolnych } a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b.$$

Ci, co znają twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, zapewne pomyślą sobie teraz: *aha, punkt średni z tezy tego twierdzenia dla funkcji kwadratowej okazuje się być zawsze środkiem przedziału* (a,b)! Można jednak teraz zapytać odwrotnie: dla jakich innych funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ punkt średni będzie zawsze środkiem przedziału? Równoważnie, wykresy jakich funkcji mają tę własność, że sieczna będzie równoległa do stycznej poprowadzonej akurat w punkcie o odciętej będącej środkiem przedziału? Jesteśmy zatem ciekawi, czy są jakieś inne krzywe o własności ($*$), czy może parabola jest wyjątkowa.

Aby dać odpowiedź, wystarczy rozwiązać równanie funkcyjne

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad a\neq b,$$

albo, ogólniej (żeby nie zakładać różniczkowalności f), zadanie jest takie: znaleźć $f,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, takie że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=h\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad a\neq b.$$

Przystąpmy do rozwiązania: niech f,h spełniają powyższe równanie. Przede wszystkim zauważmy, że możemy uwolnić się od warunku $a\neq b$, gdyż zachodzi oczywiście

$$(**)\qquad f(b)-f(a)=(b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Kładąc $a=0$, możemy wyrazić f za pomocą h

$$f(b)=bh\left(\frac{b}{2}\right)+f(0).$$

Zatem z ($**$) możemy zrobić równanie z tylko jedną niewiadomą funkcją, otrzymując

$$bh\left(\frac{b}{2}\right)-ah\left(\frac{a}{2}\right)=(b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Wprowadźmy dla ułatwienia pomocniczą funkcję $g(x):=h\left(\frac{x}{2}\right)-h(0)$. Mamy

$$bg(b)-ag(a)=(b-a)g(a+b),\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Podstawiając $b=-a$, wobec $g(0)=0$, dostajemy $g(a)=-g(-a)$. Teraz, zamieniając a na $-a$, mamy

$$(a+b)g(b-a)=bg(b)+ag(-a)=bg(b)-ag(a)=(b-a)g(a+b),$$

czyli dla takich a,b, że $a+b\neq 0$, $b-a\neq 0$, jest

$$\frac{g(b-a)}{b-a}=\frac{g(a+b)}{a+b}.$$

[*]student, Wydział Fizyki i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wstawiając więc np. $b = \frac{x+1}{2}$, $a = \frac{-x+1}{2}$, otrzymujemy $\frac{g(x)}{x} = g(1)$, dla $x \neq 0$, czyli mamy wyznaczone g

$$g(x) = \alpha x,$$

gdzie α jest pewną stałą. Stąd

$$h(x) = 2\alpha x + \beta, \qquad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

dla pewnych stałych α, β, γ.

Z drugiej strony, bez trudu sprawdzamy, że powyższe funkcje spełniają wyjściowe równanie. Zatem parabola (w zdegenerowanym przypadku $\alpha = 0$ – prosta) jest jedyną krzywą o dyskutowanej własności. Zadziwiające, że udało nam się do tego dojść zupełnie elementarnie.

Powyższe rozwiązanie naszego równania funkcyjnego pochodzi od J. Aczéla – por. [1].

Podsumowując, stwierdziliśmy, że własność $(*)$ w pełni charakteryzuje parabolę. Możemy jeszcze pokusić się o interpretację fizyczną tej charakteryzacji. Otóż, nigdy niekończący się i nigdy niezaczynający się ruch ciała wzdłuż prostej ma własność *w każdym przedziale czasu* $[t, t']$ *prędkość średnia w tym przedziale jest równa prędkości w chwili* $\frac{t+t'}{2}$ *– będącej środkiem tego przedziału czasu*, wtedy i tylko wtedy, gdy jest to ruch jednostajnie przyspieszony.

Istotnie, rozwiązaniem równania

$$\frac{x(t') - x(t)}{t' - t} = v\left(\frac{t + t'}{2}\right), \qquad t < t',$$

z niewiadomymi funkcjami położenia i prędkości od czasu $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są, jak widzieliśmy, $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, $v(t) = v_0 + gt$. Co ciekawe, to fizyczne podejście do geometrycznej własności paraboli może pchać nas dalej i motywować do rozwiązywania innych równań funkcyjnych, gdyż pytać możemy np., dla jakich ruchów ciała po prostej jego prędkość średnia w każdym przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału. Odpowiedź przyniesie rozwiązanie równania

$$\frac{x(t') - x(t)}{t' - t} = v(t' - t), \qquad t < t',$$

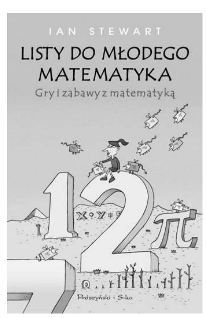
ale to już inna historia.

Literatura

[1] J. Aczél, *A mean value property of the derivative of quadratic polynomials—without mean values and derivatives*, Mathematics Magazine 58 (1985), nr 1, 42–45.

[2] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Script, Warszawa 2006.

Spotkanie z matematykiem



Osoby stojące przed wyborem studiów i biorące pod uwagę kierunek *matematyka* zastanawiają się zapewne, jak takie studia wyglądają i czym się różnią od innych. Jeśli dodatkowo przeczuwają, że mogą związać się zawodowo z matematyką na całe życie, to chciałyby wiedzieć, jak to życie będzie wyglądać.

Rozmowa z kimś, kto większość tej drogi przebył i może podzielić się swoim doświadczeniem, ułatwia wyobrażenie sobie nie tylko zrębów matematycznej kariery, ale i tego, jak matematyka formuje sposób myślenia i postrzegania świata. Lekturę książki Iana Stewarta pt. *Listy do młodego matematyka* można traktować jako osobiste spotkanie z przyjaźnie nastawionym profesorem matematyki. Tematów do rozmów jest wiele, bo korespondencja rozpoczyna się w momencie, gdy Meg – książkowa odbiorczyni listów – rozważa właśnie, czy studiować matematykę, a kończy się, gdy sama zostaje profesorem.

Są zatem i wskazówki, jak się uczyć matematyki, a potem, jak uczyć jej innych. Autor wie także, że każdy adept matematyki zastanawia się, ile tej matematyki jest, czy pozostało jeszcze coś do udowodnienia, którą dziedziną się zajmować i co robić, gdy przychodzi czas znużenia tymi wszystkimi twierdzeniami i abstrakcją. Z pomocą anegdot Stewart przybliża nam ponadto sposób pracy matematyka i zmagania się z nowymi problemami, przedstawia społeczność tych uczonych – co o niej jest stereotypem, a co prawdą. Oprócz udzielania dobrych rad pozwala też sobie na rozważania filozoficzne, ostatni list zatytułowany jest bowiem *Czy Bóg jest matematykiem*? Wiedza matematyczna jest przekazywana w książce w znikomym stopniu. Przedstawienie treści jakiegoś twierdzenia pojawia się w odpowiedziach na zadawane pytania, na przykład: po co są dowody? Oprócz tego profesor przekonuje nas, że dowód to *opowieść, którą matematycy opowiadają innym matematykom, wyrażona w ich wspólnym języku.*

Zachęcam wszystkich „młodych matematyków” – osób na początku matematycznej przygody – do spotkania ze Stewartem. Przecież dobrze jest przed wyprawą przeczytać odpowiedni przewodnik.

M.H.

Ian Stewart, *Listy do młodego matematyka*, tłum. Paweł Strzelecki, Prószyński i S-ka, 2008