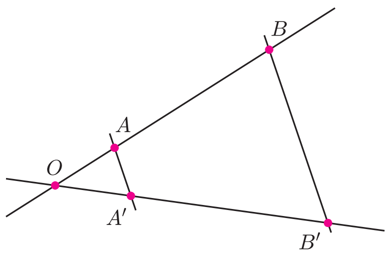
O robieniu wykresów

*Adam KOLANY**

*Pracownia Matematyki i Informatyki, Pałac Młodzieży w Katowicach

W szkołach uczą nas, jak mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, „wykonać” wykres funkcji postaci $y = c \cdot f(a \cdot x + b) + d$ dla zadanych a, b, c i d, ale nikt nie uczy nas, jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ uzyskać (choćby w przybliżeniu) wykres funkcji $y_1 = 1/f(x)$ czy $y_2 = (f(x))^2$. W szczególności, chciałoby się wiedzieć, jak naszkicować przybliżenie funkcji $y = 1/x$ czy $y = x^2$. Żeby zaś dostać wykres funkcji $y = x^3$, byłoby dobrze wiedzieć, jak z wykresów funkcji f i g dostać wykres funkcji $f \cdot g$. Podobnie, gdybyśmy umieli wyznaczyć wykres $h = f/g$ dla znanych wykresów funkcji f i g, rozwiązalibyśmy problem wspomnianej wcześniej funkcji y_1.

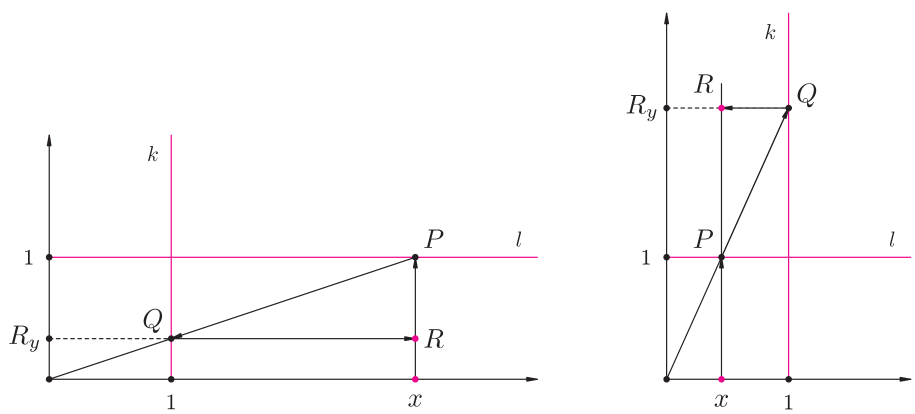


Rys. 1

Zadanie nasze stanie się łatwiejsze, gdy przyjrzymy się znanemu skądinąd twierdzeniu Talesa (rys. 1):

$$\textit{Jeśli } AA' \parallel BB', \textit{ to } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

I tak, zabierając się do szkicowania wykresu funkcji $y = 1/f(x)$, zauważmy, że na rysunku 2 punkt R leży na wysokości równej $1/x$.



Rys. 2

Daje to nam następujący „przepis” na wykres funkcji $y = 1/x$.

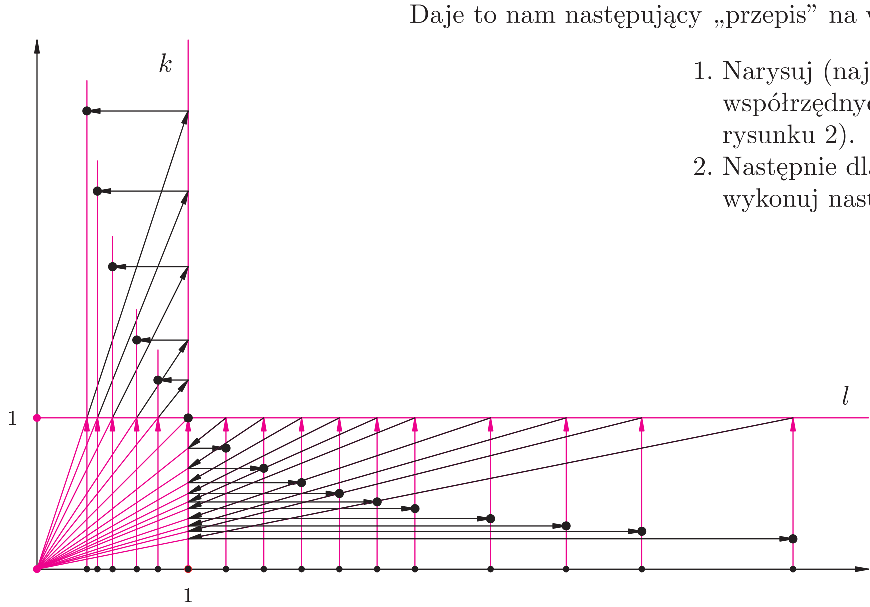
1. Narysuj (najlepiej na papierze milimetrowym) układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l (jak na rysunku 2).
2. Następnie dla x z zadanego przedziału, np. co 2 mm, wykonuj następujące kroki:

   2.1. Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą do OX i znajdź punkt P jej przecięcia z prostą l.

   2.2. Następnie znajdź punkt Q przecięcia prostej k z prostą łączącą $(0, 0)$ z P.

   2.3. Przesuń punkt Q równolegle do osi odciętych nad punkt o odciętej x.

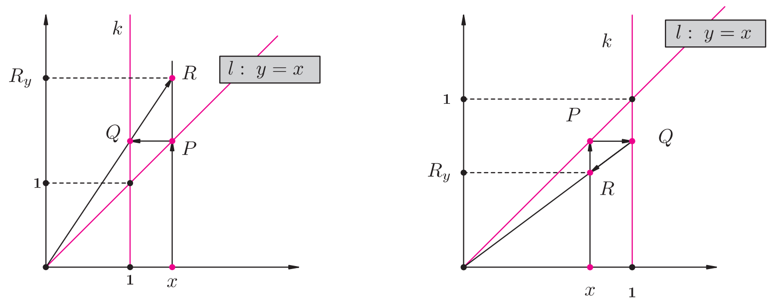
   2.4. Otrzymany punkt R jest punktem wykresu funkcji $y = 1/x$.



Rys. 3

Jak to działa, widać na rysunku 3.

Przejdźmy teraz do wykresu funkcji kwadratowej. Tutaj pomoże nam następujący rysunek.

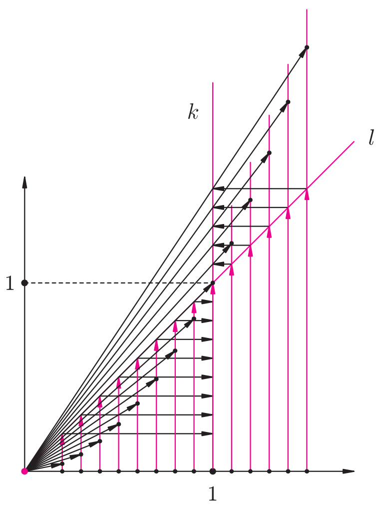


Rys. 4

Zauważmy, że rzędna R_y punktu R wynosi tutaj x^2.

Dostajemy tym samym sposób wyznaczania wykresu funkcji kwadratowej.

1. Narysuj układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l (jak na rysunku 4).
2. Następnie dla x z zadanego przedziału, podobnie jak poprzednio, wykonuj następujące kroki:
   2.1. Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą do OX i znajdź punkt P jej przecięcia z prostą l.
   2.2. Następnie przesuń równolegle do osi odciętych punkt P aż do przecięcia z k, otrzymując Q.
   2.3. Teraz znajdź punkt wspólny prostej łączącej $(0, 0)$ i Q z prostą prostopadłą do osi odciętych przechodzącą przez punkt o współrzędnych $(x, 0)$.
   2.4. Otrzymany punkt R jest punktem wykresu funkcji $y = x^2$.



Rys. 5

Jak to działa? Zobaczmy na rysunku 5. Mnie się podoba.

W takim razie co z $y = x^3$?

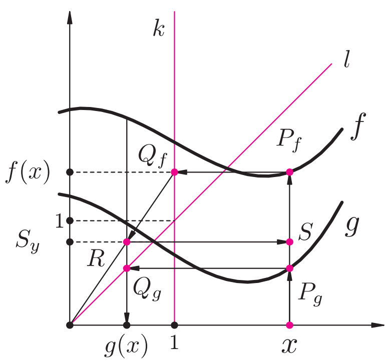
W tym celu zajmijmy się najpierw bardziej ogólnym zagadnieniem: jak, mając wykresy funkcji f i g, uzyskać wykres funkcji $f \cdot g$. Rozważmy w tym celu rysunek 6. I co my tu widzimy? Niech S_y będzie rzędną S. Z rysunku widać, że

$$S_y : g(x) = f(x) : 1,$$

skąd

$$S_y = f(x) \cdot g(x),$$

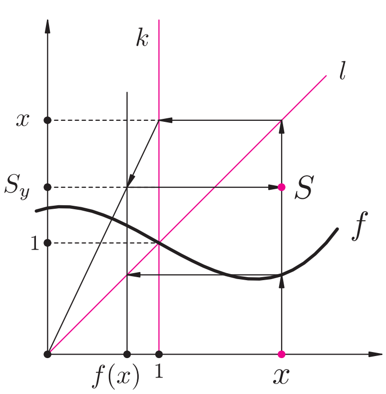
czyli rzędna punktu S jest równa $f(x) \cdot g(x)$.



Rys. 6

Tym sposobem dostajemy przepis na konstrukcję wykresu $y = f(x) \cdot g(x)$ z wykresów f i g.

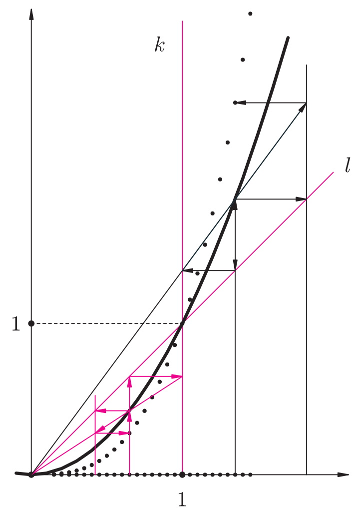
1. Narysuj układ współrzędnych oraz pomocnicze proste k i l.
2. Następnie dla x z zadanego przedziału wykonuj następujące kroki:
   2.1. Z punktu $(x, 0)$ wystaw prostą prostopadłą (do OX) i znajdź punkt P_f jej przecięcia z wykresem f oraz punkt P_g jej przecięcia z wykresem g.
   2.2. Przesuń równolegle do osi odciętych punkt P_f do przecięcia z k, otrzymując Q_f.
   2.3. Przesuń równolegle do osi odciętych punkt P_g do przecięcia z l, otrzymując Q_g.
   2.4. Znajdź punkt R przecięcia prostej prostopadłej do OX przechodzącej przez punkt Q_g oraz prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i punkt Q_f.
   2.5. Przesuń teraz R równolegle do osi odciętych nad punkt $(x, 0)$.
   2.6. Otrzymany punkt S jest punktem wykresu funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$.



Rys. 7

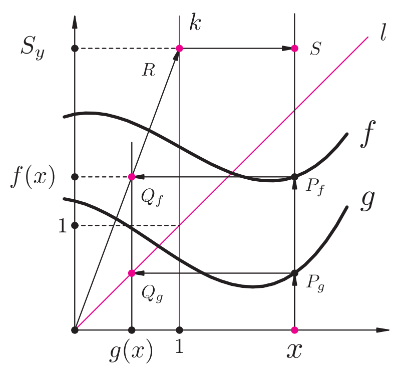
Nieco prościej wygląda sprawa, gdy jedna z funkcji jest identycznościowa, czyli wyznaczanie wykresu $y = x \cdot f(x)$ przy danym wykresie f. Popatrzmy na rysunek 7. Tutaj rzędna S równa jest iloczynowi $x \cdot f(x)$. Jako proste ćwiczenie proponuję sformułować stosowny przepis.

Niestety, jak widać z rysunku 8, przy większej ilości punktów obraz staje się nieco zagmatwany – ale mimo to przekonujący.



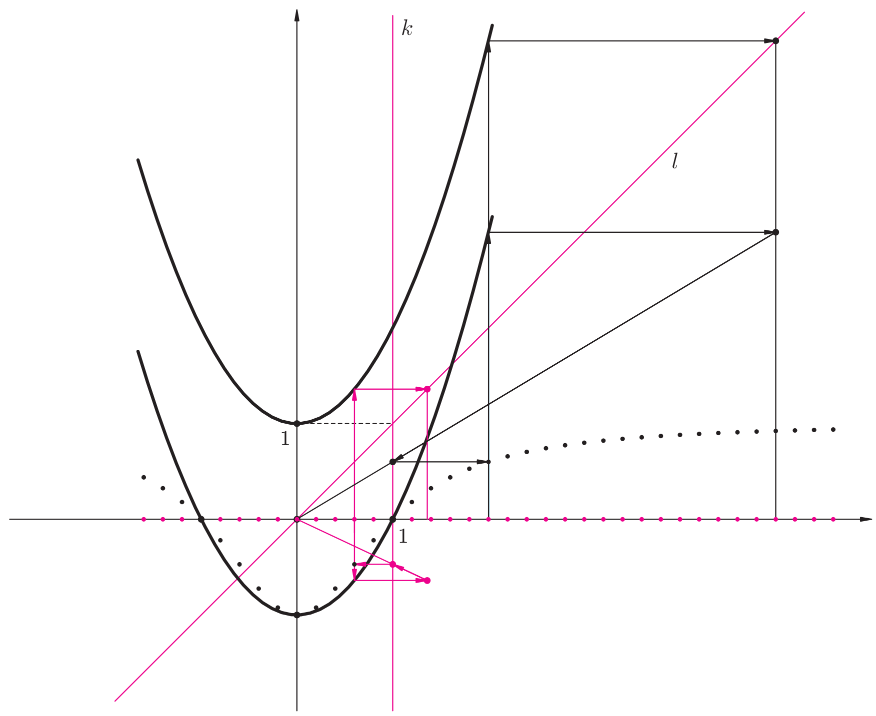
Rys. 8

Aby postawić kropkę nad „i", zastanówmy się jeszcze, jak z zadanych wykresów f i g wyznaczyć wykres funkcji $y = f(x)/g(x)$. Znowu popatrzmy na rysunek (rys. 9). Wykazanie, że rzędna punktu S jest równa ilorazowi $f(x)/g(x)$, pozostawiamy Czytelnikowi. Stąd już nietrudno odczytać odpowiednią procedurę.



Rys. 9

Dla przykładu, znajdźmy wykres funkcji $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.



Rys. 10

Ładny?

Komentarz

Czesław Bagiński i Edmund R. Puczyłowski w artykule *Zmodyfikowane wielomiany i twierdzenie Erdősa* (*Delta* 9/2008, str. 18–19) przedstawili dowód następującego twierdzenia Erdősa:

Twierdzenie 1. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to z dowolnego zbioru $2p - 1$ liczb całkowitych można wybrać p liczb, których suma jest podzielna przez p.*

Uzupełnijmy ten tekst uwagą, że wspomniane twierdzenie jest prawdziwe również, gdy zamiast liczby pierwszej weźmiemy dowolną liczbę naturalną $n \geqslant 1$.

Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, załóżmy więc, że $n \geqslant 2$. Wówczas n możemy rozłożyć jednoznacznie na czynniki pierwsze. Chcemy wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla liczb naturalnych a i b, większych od 1, wynika, że twierdzenie zachodzi również dla ich iloczynu. Wtedy, korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze i twierdzenia 1, przez indukcję otrzymujemy uogólnione twierdzenie.

Rozważmy więc zbiór $ab - 1$ liczb całkowitych. Ponieważ $ab - 1 \geqslant 2b - 1$, na mocy twierdzenia 1 możemy wybrać z tego zbioru b liczb, których suma jest podzielna przez b. Oznaczamy tę sumę przez bS_1. Wyrzucamy wybrane liczby ze zbioru — zostaje nam $(a - 1)b - 1$ elementów. Postępowanie to powtarzamy do chwili, gdy w zbiorze pozostanie $b - 1$ liczb. W ten sposób utworzymy $((2ab - 1) - (b - 1))/b = 2a - 1$ zbiorów b-elementowych.

W efekcie mamy $2a - 1$ sum: $bS_1, bS_2, \ldots, bS_{2a-1}$. Z założenia prawdziwości twierdzenia dla a, spośród liczb $S_1, \ldots, S_{2a-1}$ można wybrać a liczb, których suma jest podzielna przez a. Szukany zbiór jest sumą zbiorów b-elementowych odpowiadających wybranym S_i – ma on ab elementów, które sumują się do liczby podzielnej przez ab.

Witold BEDNAREK

Więcej o uogólnieniach twierdzenia Erdősa w następnych numerach!