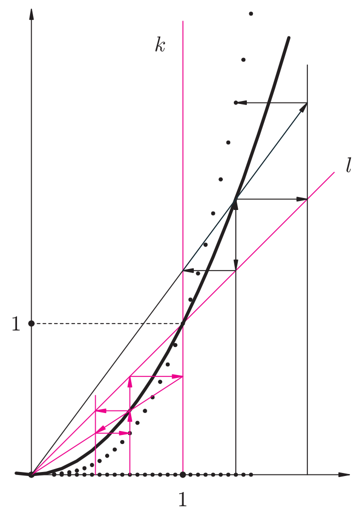
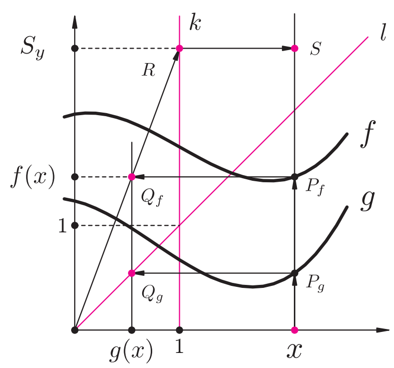
Niestety, jak widać z rysunku 8, przy większej ilości punktów obraz staje się nieco zagmatwany – ale mimo to przekonujący.



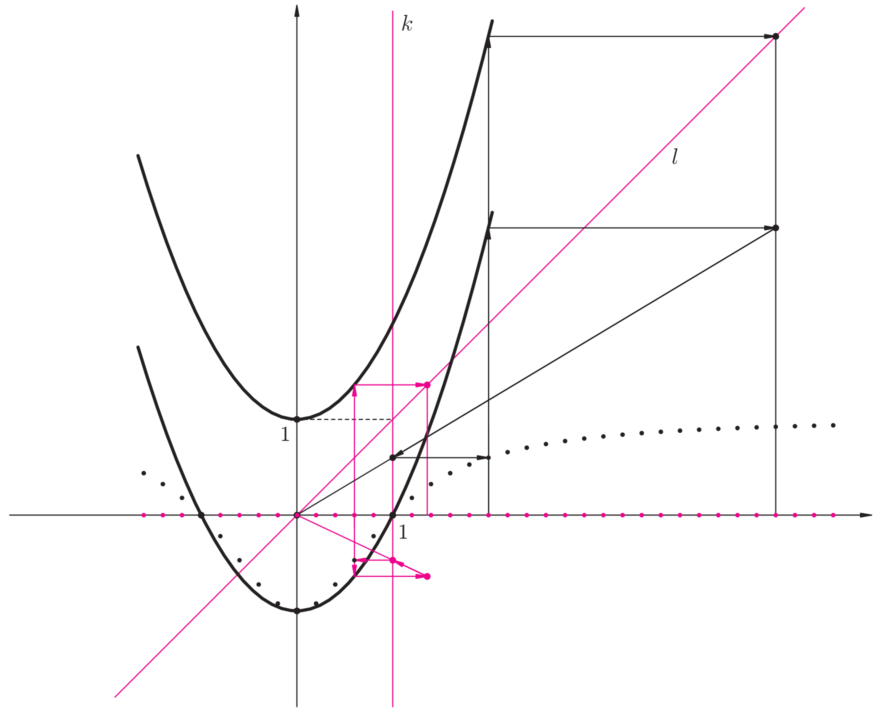
Rys. 8

Aby postawić kropkę nad „i”, zastanówmy się jeszcze, jak z zadanych wykresów f i g wyznaczyć wykres funkcji $y = f(x)/g(x)$. Znowu popatrzmy na rysunek (rys. 9). Wykazanie, że rzędna punktu S jest równa ilorazowi $f(x)/g(x)$, pozostawiamy Czytelnikowi. Stąd już nietrudno odczytać odpowiednią procedurę.



Rys. 9

Dla przykładu, znajdźmy wykres funkcji $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.



Rys. 10

Ładny?

Komentarz

Czesław Bagiński i Edmund R. Puczyłowski w artykule *Zmodyfikowane wielomiany i twierdzenie Erdősa* (*Delta* 9/2008, str. 18–19) przedstawili dowód następującego twierdzenia Erdősa:

Twierdzenie 1. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to z dowolnego zbioru $2p - 1$ liczb całkowitych można wybrać p liczb, których suma jest podzielna przez p.*

Uzupełnijmy ten tekst uwagą, że wspomniane twierdzenie jest prawdziwe również, gdy zamiast liczby pierwszej weźmiemy dowolną liczbę naturalną $n \geqslant 1$.

Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, załóżmy więc, że $n \geqslant 2$. Wówczas n możemy rozłożyć jednoznacznie na czynniki pierwsze. Chcemy wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla liczb naturalnych a i b, większych od 1, wynika, że twierdzenie zachodzi również dla ich iloczynu. Wtedy, korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze i twierdzenia 1, przez indukcję otrzymujemy uogólnione twierdzenie.

Rozważmy więc zbiór $ab - 1$ liczb całkowitych. Ponieważ $ab - 1 \geqslant 2b - 1$, na mocy twierdzenia 1 możemy wybrać z tego zbioru b liczb, których suma jest podzielna przez b. Oznaczamy tę sumę przez bS_1. Wyrzucamy wybrane liczby ze zbioru — zostaje nam $(a-1)b - 1$ elementów. Postępowanie to powtarzamy do chwili, gdy w zbiorze pozostanie $b - 1$ liczb. W ten sposób utworzymy $((2ab - 1) - (b - 1))/b = 2a - 1$ zbiorów b-elementowych.

W efekcie mamy $2a - 1$ sum: $bS_1, bS_2, \ldots, bS_{2a-1}$. Z założenia prawdziwości twierdzenia dla a, spośród liczb $S_1, \ldots, S_{2a-1}$ można wybrać a liczb, których suma jest podzielna przez a. Szukany zbiór jest sumą zbiorów b-elementowych odpowiadających wybranym S_i – ma on ab elementów, które sumują się do liczby podzielnej przez ab.

Witold BEDNAREK

Więcej o uogólnieniach twierdzenia Erdősa w następnych numerach!