Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 462 ($WT = 3{,}70$) i 463 ($WT = 3{,}18$) z numeru 9/2008

Krzysztof Magiera	Łosiów	27,27
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	26,00
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,63
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,36
Radosław Poleski	Kołobrzeg	22,24

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 474, 475

Redaguje Jerzy B. BROJAN

474. Za pomocą soczewki skupiającej wytworzono obraz pozorny trzykrotnie powiększony. Nie zmieniając położenia przedmiotu, przesuwano ekran po drugiej stronie soczewki i zaobserwowano bardzo słaby obraz rzeczywisty dwukrotnie zmniejszony. Jak powstał ten obraz? Ile wynosi współczynnik załamania szkła soczewki? Grubość soczewki jest mała w porównaniu z odległością przedmiotu i obrazów.

475. Płaska warstwa o grubości d i stałej dielektrycznej równej 1 zawiera jednorodnie rozmieszczony ładunek dodatni o gęstości objętościowej ϱ i styka się z drugą warstwą o identycznych parametrach, ale zawierającą ładunek ujemny. Obliczyć różnicę potencjałów między zewnętrznymi powierzchniami warstw.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2008

Przypominamy treść zadań:

466. Stojący na peronie pasażer włączył stoper w chwili, gdy minął go przód hamującego pociągu metra. Gdy minął go przód drugiego wagonu, stoper pokazał czas $t_1 = 1{,}82$ s, a gdy minął go przód trzeciego wagonu, stoper pokazał czas $t_2 = 4{,}05$ s. Jeśli pociąg hamuje ze stałym przyspieszeniem, to w jakiej chwili t_3 minie pasażera przód czwartego wagonu?

467. Chmura o kształcie długiego walca o promieniu R składa się z elektronów krążących wokół osi walca w polu magnetycznym o indukcji B skierowanym wzdłuż tej osi. Liczba elektronów na jednostkę objętości n jest stała wewnątrz chmury, a na zewnątrz niej jest próżnia. Znaleźć możliwe prędkości kątowe ω obrotu chmury, oraz maksymalną wartość n, dla której taki ruch elektronów jest możliwy (przy ustalonych pozostałych parametrach). Założyć, że prędkość elektronów jest znacznie mniejsza od prędkości światła.

466. Spełnione są równania

$$d = v_0t_1 - at_1^2/2, \quad 2d = v_0t_2 - at_2^2/2, \quad 3d = v_0t_3 - at_3^2/2,$$

gdzie d jest długością wagonu, v_0 – prędkością pociągu w chwili włączenia stopera, a a – opóźnieniem (przyspieszeniem ujemnym). Po wyeliminowaniu v_0 i a otrzymujemy równanie kwadratowe na t_3

$$t_3^2(t_2 - 2t_1) + t_3(2t_1^2 - t_2^2) + 3t_1t_2(t_2 - t_1) = 0.$$

Analityczna postać rozwiązania jest tak „niewygodna”, że ją pominiemy i podamy jedynie wynik liczbowy $t_3 = 7{,}24$ s. Należy wybrać mniejszy z dwóch wyników, gdyż większy odpowiada nierealnemu „powrotowi” pociągu po jego zatrzymaniu.

467. Chmura wytwarza radialne pole elektryczne, którego natężenie w odległości r od osi walca można obliczyć, stosując prawo Gaussa do współosiowego walca o promieniu r. Dla $r < R$ otrzymujemy

$$E(r) = \frac{rne}{2\varepsilon_0}.$$

Przyrównujemy różnicę siły Lorentza i siły oddziaływania elektrostatycznego do siły dośrodkowej

$$e\left(\omega rB - \frac{rne}{2\varepsilon_0}\right) = m\omega^2 r \qquad (m \text{ – masa elektronu}).$$

Jak widać, prędkość kątowa ω nie zależy od r, czyli chmura obraca się „sztywno”. Po wprowadzeniu oznaczeń $\omega_\mathrm{c} = eB/m$ (częstość cyklotronowa) i $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{e^2n/m\varepsilon_0}$ (częstość plazmowa Langmuira) równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\omega^2 - \omega_\mathrm{c}\omega + \tfrac{1}{2}\omega_\mathrm{p}^2 = 0.$$

Zatem

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\omega_\mathrm{c} \pm \sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 - 2\omega_\mathrm{p}^2}).$$

Utrzymanie chmury w opisanym ruchu przestaje być możliwe, gdy $2\omega_\mathrm{p}^2$ przekroczy wartość ω_c^2, tzn.

$$n_\mathrm{max} = \frac{B^2\varepsilon_0}{2m}.$$

Logiczna spójność rozwiązania wymaga jeszcze rozważenia pola magnetycznego wytworzonego przez ruch ładunku chmury. Okazuje się, że pochodząca od tego pola magnetycznego siła Lorentza jest mniejsza od siły elektrostatycznej o czynnik rzędu v^2/c^2, czyli wobec założonej nierelatywistycznej prędkości elektronów można tę siłę pominąć.

Klub 44

$\sqrt[\otimes]{\sum\!\!\!\!\int !} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2009

Zadania z matematyki nr 577, 578

Redaguje Marcin E. KUCZMA

577. Dwusieczna kąta ABC trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie E oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AE i CD. Dowieść, że punkty M, B, C, N leżą na jednym okręgu.

578. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazach

$$a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

Zadanie 578 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2008

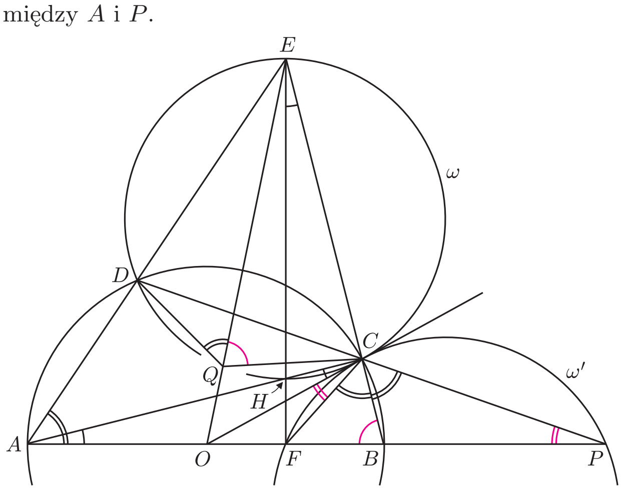
Przypominamy treść zadań:

569. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O; odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach OBC i ODA przecinają się w punktach O i Q. Dowieść, że $OQ \perp PQ$.

570. Znaleźć wszystkie funkcje f, określone w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, ciągłe prawostronnie w punkcie 0 i spełniające nierówność

$$f\left(\frac{x+y}{1+x+y}\right) \geqslant f(x) + f(y) \qquad \text{dla wszystkich } x, y \geqslant 0.$$

569. Nie tracąc ogólności, przyjmijmy że punkt B leży między A i P.



Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC, i niech EF będzie wysokością w trójkącie ABE; pozostałe dwie wysokości to AC i BD. Przecinają się one w punkcie H; odcinek EH jest średnicą okręgu ω, przechodzącego przez punkty C i D. Ponieważ $|\sphericalangle OCH| = |\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle CEH|$, okrąg ω jest styczny do prostej OC.

Zachodzi ponadto równość $|ED| \cdot |EA| = |EC| \cdot |EB|$, z której wynika, że punkt E leży na osi potęgowej okręgów (ODA) i (OBC), czyli na prostej OQ.

Każdy z czworokątów $OQDA$ i $OQCB$ ma (z założenia) okrąg opisany. Wobec tego $|\sphericalangle DQE| = |\sphericalangle EAB|$ oraz $|\sphericalangle CQE| = |\sphericalangle EBA|$, skąd przez dodanie stronami

$$|\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle EBA| = 180^\circ - |\sphericalangle BEA|.$$

To zaś oznacza, że okrąg ω przechodzi też przez punkt Q.

Dalej, każdy z czworokątów $AFCE$ i $ABCD$ ma okrąg opisany, więc mamy równości

$$|\sphericalangle BCF| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCP|.$$

To pozwala na dwa sposoby wyrazić miarę kąta ABC:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABC| &= |\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle OCF| + |\sphericalangle BCF| = \\ &= |\sphericalangle OCF| + |\sphericalangle DAB|, \\ |\sphericalangle ABC| &= 180^\circ - |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BCP| = \\ &= |\sphericalangle FPC| + |\sphericalangle DAB|. \end{aligned}$$

Z przyrównania prawych stron dostajemy równość $|\sphericalangle OCF| = |\sphericalangle FPC|$, prowadzącą do wniosku, że okrąg ω', opisany na trójkącie CFP, jest styczny do prostej OC.

Zatem prosta OC jest wspólną styczną do okręgów ω i ω' – jest więc ich osią potęgową. W takim razie $|OF| \cdot |OP| = |OQ| \cdot |OE|$ i w konsekwencji czworokąt $EQFP$ jest wpisany w okrąg. Skoro zaś kąt EFP jest prosty, wynika stąd, że i kąt EQP jest prosty.

570. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Wszystkie jej wartości są liczbami nieujemnymi. Dla $x = y = 0$ mamy $f(0) \geqslant 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Podstawiając w danej nierówności $y = 0$, otrzymujemy zależność

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) \geqslant f(x) \qquad \text{dla } x \geqslant 0.$$

Ustalmy liczbę $x_0 > 0$ i weźmy pod uwagę ciąg liczb dodatnich (x_n) określony rekurencyjnie:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Jest on malejący, więc zbieżny. Jego granica λ spełnia równanie $\lambda = \lambda/(1+\lambda)$, którego jedynym pierwiastkiem jest $\lambda = 0$. Tak więc $\lim x_n = 0$.

Nierówność spełniona przez funkcję f pokazuje, że $f(x_{n+1}) \geqslant f(x_n)$. Zatem ciąg $(f(x_n))$ jest niemalejący, skąd wniosek, że

$$f(x_0) \leqslant f(x_n) \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Przechodząc do granicy $(n \to \infty)$ i korzystając z założenia ciągłości funkcji f w punkcie 0, stwierdzamy, że $f(x_0) = 0$. A ponieważ liczba x_0 była wybrana dowolnie, znaczy to, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru. Oczywiście spełnia ona wyjściową nierówność – jest więc jej jedynym rozwiązaniem.