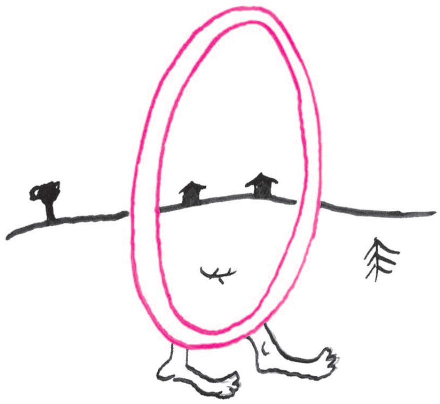
Combinatorial Nullstellensatz w kombinatoryce przestrzennej

Mikołaj BIŃKOWSKI[*]

Jest to skrót pracy nagrodzonej brązowym medalem w XXX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2008 roku.



Metodę Combinatorial Nullstellensatz opublikował w 1999 r. Noga Alon. Opiera się ona na dwóch twierdzeniach będących szczególnymi przypadkami twierdzenia Hilberta o zerach. W mojej pracy korzystałem z jednego z nich.

Twierdzenie 1 (Combinatorial Nullstellensatz)**.** *Niech* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *będzie wielomianem określonym nad dowolnym ciałem* $\mathbb{F}$. *Jeżeli w wielomianie* f *współczynnik przy jednomianie* $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_k^{t_k}$ *jest różny od* 0 *i* $\deg(f) = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$, *to dla dowolnych zbiorów* $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset \mathbb{F}$, *takich że* $|S_i| > t_i$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant k$, *istnieją* $c_i \in S_i$ *spełniające warunek*

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0.$$

W mojej pracy zająłem się uogólnieniem problemu, który został postawiony w jednym z zadań na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Hanoi w 2007 r.

Niech n *będzie dodatnią liczbą naturalną. Rozpatrzmy zbiór*

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\}$$

złożony z $(n+1)^3 - 1$ *punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma zawiera* S, *ale nie zawiera punktu* $(0, 0, 0)$.

Powyższy problem można przeformułować jako pytanie o najmniejszą liczbę płaszczyzn potrzebnych do pokrycia punktów kratowych kostki $n \times n \times n$ poza jednym z wierzchołków. Warto się zastanowić, jak uogólnić to zagadnienie na wyższe wymiary i jakimi obiektami zastąpilibyśmy wówczas pokrywane punkty kratowe danej figury. Ponadto możemy zapytać, czy ta figura musi mieć krawędzie równej długości. Następujące twierdzenie prezentuje uzyskane przeze mnie wyniki. Terminem *k-hiperprostopadłościan* określamy figurę będącą k-wymiarowym odpowiednikiem prostokąta i prostopadłościanu. *Hiperpłaszczyzną* w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ nazywamy zbiór dający się opisać jednym równaniem liniowym, czyli przestrzeń $(k-1)$-wymiarową zawartą w wyjściowej.

Twierdzenie 2. *Rozważmy* k*-hiperprostopadłościan w* $\mathbb{R}^k$ *o wymiarach* $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$, *gdzie* $n_i \in \mathbb{N}$, *dla* $1 \leqslant i \leqslant k$, *i zbiór jego punktów kratowych* $S = \{0, 1, \ldots, n_1\} \times \{0, 1, \ldots, n_2\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, n_k\}$. *Niech* $O = (0, 0, \ldots, 0)$ *będzie środkiem układu współrzędnych. Wówczas liczba hiperpłaszczyzn, których suma zawiera zbiór* $S \setminus \{O\}$ *i nie zawiera punktu* O, *musi być równa przynajmniej* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że minimalna liczba m, spełniająca warunki zadania, jest mniejsza od $\sum n_i$. Mamy m hiperpłaszczyzn, spełniających warunki zadania, opisanych równaniami $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k = b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Wówczas wszystkie b_i są różne od zera, gdyż hiperpłaszczyzny te nie zawierają punktu O. Rozważmy wielomian

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} (x_i - j) + \prod_{i=1}^{m} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k - b_i),$$

gdzie

$$A = (-1)^{-(\sum n_i) + m + 1} \prod_{i=1}^{k} \frac{b_i}{n_i!}.$$

Wielomian P został zdefiniowany tak, aby jego miejscami zerowymi były wszystkie punkty zbioru S. Istotnie, oba iloczyny zerują się na punktach zbioru $S \setminus \{O\}$, natomiast współczynnik A jest dobrany tak, by otrzymać $P(0, \ldots, 0) = 0$.

Ponieważ b_i są niezerowe, to także $A \neq 0$. Popatrzmy na jednomian $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ – pojawia się on tylko w pierwszym iloczynie w definicji wielomianu P, co wynika z założenia, że $m < \sum n_i$. Wobec tego współczynnik w P przy tym jednomianie jest równy A, więc różny od zera. Stąd $\deg(P) = \sum n_i$.

[*] uczeń, II LO im. Króla Jana Sobieskiego w Krakowie

Niech $S_i = \{0, 1, \ldots, n_i\}$, dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Wówczas $|S_i| = n_i + 1 > n_i$ oraz $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$. Możemy więc skorzystać z *Combinatorial Nullstellensatz* dla $t_i = n_i$ oraz uprzednio zdefiniowanych S_i. Wnosimy, że istnieje taki punkt $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, dla którego $P(c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności tezy. $\square$

Okazuje się, że otrzymane oszacowanie jest optymalne. Aby to wykazać, wystarczy rozważyć zbiór $n_1 + \ldots + n_k$ hiperpłaszczyzn o równaniach $x_i = j$, dla $j = 1, 2, \ldots, n_i$ oraz $i = 1, 2, \ldots, k$.

W podobny sposób możemy udowodnić nieco ogólniejsze twierdzenie, w którym wyłączany punkt jest dowolnym punktem kratowym k-hiperprostopadłościanu (niekoniecznie wierzchołkiem). Dowód różni się od powyższego nieco bardziej skomplikowaną postacią konstruowanego wielomianu.

Powyższe twierdzenie daje także optymalne oszacowania dla kilku innych problemów, które rozważałem w mojej pracy. Dotyczyły one analogicznego pokrycia hiperpłaszczyznami punktów kratowych k-wymiarowej kostki, a także k-hiperprostopadłościanu z wyłączeniem dwóch przeciwległych wierzchołków lub wszystkich wierzchołków.

Warto także zastanowić się nad minimalną liczbą hiperpłaszczyzn potrzebnych do pokrycia wszystkich punktów kratowych kostki $\{0, 1, \ldots, n\}^k$ z wyłączeniem wszystkich punktów znajdujących się na jednej z głównych przekątnych. Udało mi się uzyskać wyniki tylko dla kwadratu, tj. przypadku dwuwymiarowego. Może Czytelnik spróbuje rozwiązać ten problem?

Zadania

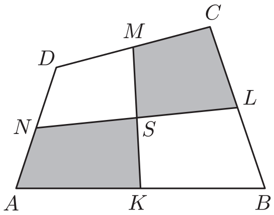
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 735. Promień światła pada pod kątem α na stos płaskich przezroczystych płytek jednakowej grubości. Współczynnik załamania każdej z nich jest k razy mniejszy niż poprzedniej. Dla jakiego najmniejszego kąta padania promień nie przejdzie przez stos N płytek? Współczynnik załamania wierzchniej płytki wynosi n.
Rozwiązanie na str. 12

F 736. W ośrodku o współczynniku załamania $n = 1{,}3$ rozchodzi się wąska równoległa wiązka świetlna o przekroju kołowym. Wiązka ta pada centralnie na wydrążenie sferyczne o promieniu dużo większym od promienia przekroju wiązki. Ile razy szersza będzie wiązka po przejściu przez wydrążenie?
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1234. Do pokrycia pewnego prostokąta zużyto k kwadratów 2×2 oraz m prostokątów o wymiarach 1×4. Żadne dwie pokrywające figury nie nakładają się ani nie wystają na zewnątrz prostokąta. Udowodnić, że tego samego prostokąta nie da się pokryć, używając $k - 1$ kwadratów wymiaru 2×2 oraz $m + 1$ prostokątów o wymiarach 1×4.
Rozwiązanie na str. 20



M 1235. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S (rysunek). Wykazać, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa sumie pól czworokątów $KBLS$ i $NSMD$.
Rozwiązanie na str. 19

M 1236. Dana jest taka liczba naturalna $n \geqslant 4$, dla której liczba $n + 1$ jest podzielna przez $[\sqrt{n}\,] + 1$. Dowieść, że liczba $(n - 1)(n - 3)$ jest podzielna przez $[\sqrt{n}\,] - 1$.
Uwaga: $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od a.
Rozwiązanie na str. 24