Co za dużo, to niezdrowo?

Joanna JASZUŃSKA

Wszelkie skojarzenia z omawianą tu miesiąc temu zasadą szufladkową Dirichleta są jak najbardziej słuszne!

Jaś układa na biurku kartki. Mogą one częściowo nakładać się, ale nie mogą wystawać poza brzeg biurka. Oznaczmy przez K łączne pole wszystkich kartek, zaś przez B powierzchnię biurka. Jeśli $K < B$, to Jaś nie zdoła przykryć całego biurka, pewien punkt zawsze będzie wystawał spod kartek. Jeśli $K > B$ i Jaś uprze się, żeby kartki jednak nie nakładały się, to nie uda mu się w ogóle ich na biurku pomieścić. Zmieszczą się, o ile niektóre będą się nakładać, wtedy pewien punkt biurka będzie przykryty co najmniej dwiema kartkami. Jeśli $K > 2B$, to znajdzie się nawet punkt biurka przykryty co najmniej trzema kartkami.

Te i tym podobne proste obserwacje okazują się całkiem przydatne przy rozwiązywaniu niektórych zadań. Oto kilka przykładów.

1. Wewnątrz kwadratu o boku 1 znajduje się pewna liczba kół. Suma ich obwodów jest równa 10. Wykaż, że istnieje prosta prostopadła do któregoś z boków kwadratu i mająca punkty wspólne z co najmniej czterema kołami.

R. Suma długości rzutów wszystkich kół na bok AB kwadratu to suma ich średnic, czyli $10/\pi > 3$. Zatem istnieje taki punkt X na AB, na który rzutowane są co najmniej cztery koła. Szukana prosta to prosta przechodząca przez X, prostopadła do AB. □

2. Na nieograniczonej łące jest nieskończenie wiele modliszek, początkowo każde dwie oddalone są o co najmniej 2 metry. Każda modliszka porusza się z prędkością do 5 metrów na minutę. Jeśli spotkają się dwie żywe modliszki, to jedna może zjeść drugą. Modliszka umiera z głodu i rozpaczy, jeśli przez minutę nie zje żadnej innej żywej modliszki. Udowodnij, że po kwadransie wszystkie modliszki będą martwe.

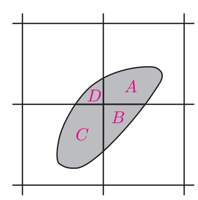
R. Przyjmijmy, że na początku każda modliszka waży M i po zjedzeniu innej modliszki jej waga powiększa się o wagę modliszki zjedzonej. Wobec tego po minucie każda żywa modliszka waży co najmniej $2M$, po dwóch minutach – co najmniej $4M$ i tak dalej, po kwadransie każda żywa modliszka waży co najmniej $2^{15}M$.

Ponieważ modliszki mogą zbliżać się z prędkością co najwyżej 10 m/min, więc wszystkie modliszki, których waga składałaby się na te $2^{15}M$, musiałyby pierwotnie znajdować się w kole o promieniu 150 metrów.

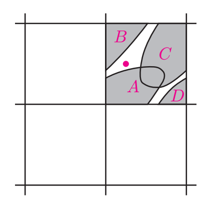
Początkowo wokół każdej modliszki był jej własny kawałek łąki o promieniu jednego metra. Zatem 2^{15} rozłącznych kół o polu π mieściło się w dużym kole o polu $\pi \cdot 151^2$ (koła wokół modliszek mogą wystawać o metr poza duże koło). Jednak $151^2 < 32000 < 32 \cdot 1024 = 2^{15}$, więc nie mogły się mieścić. Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli żadna modliszka nie mogła przeżyć kwadransa. □

3. Na dużym kraciastym obrusie chcemy zrobić plamę o z góry zadanym kształcie i o polu mniejszym od pola pojedynczej kratki. Wykaż, że można tak umieścić plamę, aby nie przykryła ona żadnego węzła kraty.

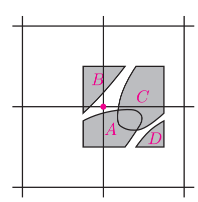
R. Przyjmijmy, że bok pojedynczej kratki ma 1 cm. Umieśćmy najpierw szablon w kształcie plamy gdziekolwiek na obrusie. Jeśli przykrywa jakiś węzeł kraty, to potnijmy go zgodnie z liniami podziału kratek (rys. 1). Następnie wszystkie otrzymane części poprzesuwajmy w pionie lub w poziomie o całkowite liczby centymetrów, aż trafią do jednej, z góry ustalonej kratki (rys. 2). Ponieważ plama ma pole mniejsze niż 1 cm^2, to poukładane w ten sposób fragmenty szablonu nie zasłonią całej wyróżnionej kratki. Wybierzmy dowolny z niezakrytych punktów i wszystkie części szablonu przesuńmy jednakowo tak, aby w tym punkcie znalazł się jakiś węzeł kraty (rys. 3). Następnie poprzesuwajmy fragmenty szablonu z powrotem tak, żeby znów utworzyły całość, ale w nowym miejscu (rys. 4). Skoro żaden z fragmentów szablonu nie przykrywał wybranego węzła kraty, to po przesunięciu o całkowite liczby centymetrów nie przykryje też żadnego innego, więc poskładany na nowo szablon wskazuje dobre miejsce do umieszczenia plamy. □



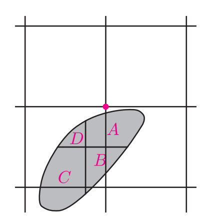
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Na koniec trzy zadania do samodzielnego rozwiązania.

4. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Udowodnij, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

Zadanie pochodzi z I etapu I Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, rozwiązanie dostępne jest m.in. na stronie `http://www.om.edu.pl/omg` oraz w broszurce I OMG.

5. W kole o promieniu 10 wybrano 372 punkty. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 2 i 3, który zawiera nie mniej niż 12 spośród tych punktów.

6. W okrąg o obwodzie 24 wpisano trójkąt równoboczny oraz kwadrat, które nie mają wspólnych wierzchołków. Wykaż, że co najmniej jeden z 7 łuków, na które wierzchołki podzieliły okrąg, ma długość nie większą niż 1.