Króliki i szufladki w geometrii

Joanna JASZUŃSKA[*]

Zasada szufladkowa Dirichleta (ZSD) głosi, że *jeśli umieszczamy $n+1$ królików w n szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce muszą się znaleźć co najmniej dwa króliki.* Łatwo to sprawdzić dla $n=1$ (dwa króliki w jednej szufladce), $n=2$ (trzy króliki w dwóch szufladkach), $n=3\ldots$ Nietrudno też rozbudować do *uogólnionej zasady szufladkowej Dirichleta* (UZSD): *jeśli umieszczamy $nk+1$ królików w n szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce musi się znaleźć co najmniej $k+1$ królików.* Oto kilka zastosowań ZSD w zadaniach geometrycznych.

Peter Gustaw Lejeune Dirichlet – matematyk niemiecki (1805–1859).

1. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 2 wybrano pięć punktów. Udowodnij, że pewne dwa spośród nich są odległe o co najwyżej 1.

R. Dzielimy trójkąt na 4 małe trójkąciki, łącząc środki boków. W którymś z nich muszą być co najmniej dwa punkty i ich odległość nie przekracza 1. □

2. Wykaż, że w każdym wielościanie pewne dwa wierzchołki mają tyle samo krawędzi.

R. Każdy z n wierzchołków ma co najmniej 3 i co najwyżej $n-1$ krawędzi. Jest zatem $n-3$ możliwych liczb krawędzi, więc z ZSD któreś dwa wierzchołki mają ich tyle samo. □

Więcej o ZSD:

[1] K. Bankov, *Applications of the pigeon-hole principle*, The Math. Gazette 79 (V.1995), 286–292.

[2] J. Jaszuńska, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, broszura I Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, 2008.

[3] A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, Biblioteczka *Delty*, WSiP, Warszawa, 1980.

[4] D. Ch. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna *Adam*, Warszawa, 2002.

[5] J. Pochrybniak, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, http://www.mimuw.edu.pl/kolkomat/materialy/dirichlet.pdf.

3. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek któregoś z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

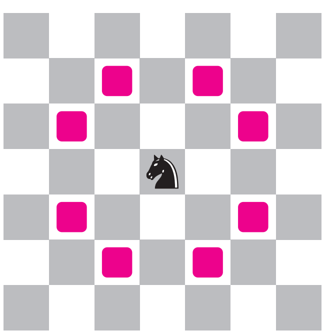
R. Każdy z danych pięciu punktów ma współrzędne jednego z czterech rodzajów: (P,P), (P,N), (N,P) lub (N,N), gdzie P to liczba parzysta, a N – nieparzysta. Zatem z ZSD pewne dwa punkty A i B mają współrzędne tego samego rodzaju. Środek odcinka AB jest punktem kratowym, bo średnia arytmetyczna liczb o tej samej parzystości jest liczbą całkowitą. □

4. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw siedli przy stole w sposób losowy tak, że żaden z nich nie zajął odpowiedniego miejsca. Wykaż, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

R. Dla każdego ze 100 ambasadorów istnieje dokładnie jedno właściwe ustawienie stołu spośród 100 możliwych. Skoro wyjściowa sytuacja nie jest dobra dla nikogo, to któreś z pozostałych 99 ustawień musi być odpowiednie dla przynajmniej dwóch osób. □

5. Wykaż, że w każdym wypukłym parzystokącie istnieje przekątna, która nie jest równoległa do żadnego z boków.

R. Skorzystamy z faktu, że n-kąt ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych (proszę sprawdzić!). Zatem $2k$-kąt ma $k(2k-3)=2k(k-2)+k$ przekątnych. Załóżmy, że każda z nich jest równoległa do któregoś boku. Wtedy z UZSD do któregoś z $2k$ boków równoległych jest co najmniej $k-1$ przekątnych. Końcami tych przekątnych oraz boku są różne wierzchołki wielokąta, jest ich łącznie co najmniej $2((k-1)+1)=2k$. Wielokąt jest wypukły, więc aby wszystkie przekątne faktycznie były przekątnymi, musi istnieć jeszcze co najmniej jeden wierzchołek. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □



Możliwe ruchy konika szachowego

6. Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Czy można z nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa się nie atakują?

R. Konik stojący na czarnym polu nie atakuje żadnego z czarnych pól i analogicznie dla konika stojącego na białym polu (rysunek). Z UZSD, spośród 1999 skoczków co najmniej 1000 stoi na polach jednego koloru. Żadne dwa z nich się nie atakują. □

[*]Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Kilka zadań domowych:

7. Na płaszczyźnie narysowanych jest $2n+1$ okręgów o promieniu $\sqrt{5}$ i o środkach w punktach kratowych. Wykaż, że można zetrzeć n spośród tych okręgów tak, aby wśród pozostałych żaden nie przechodził przez środek żadnego innego.

Wskazówka. Jak względem środka pojedynczego okręgu położone są wszystkie punkty kratowe, przez które on przechodzi? Skorzystaj z zadania 6.

8. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.

9. Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Wykaż, że wtedy pewne dwie z nich przecinają się pod kątem nie większym niż $\frac{180^\circ}{n}$.

10. Sześcian przecinamy płaszczyzną. Czy można w przekroju otrzymać czworokąt, który nie jest trapezem?