Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2009

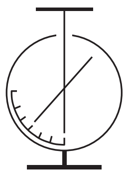
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

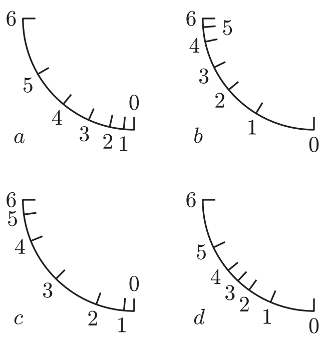
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 472, 473

Redaguje Jerzy B. BROJAN





472. Elektroskop wycechowano zaopatrując go w skalę, na której zaznaczono kolejne wartości ładunku (w dowolnych jednostkach). Czy działki skali powinny być równo od siebie odległe, czy też nierówno odległe (*a*–*d*)? Wskazać skalę najbliższą prawidłowej i uzasadnić odpowiedź.

473. W chwili początkowej drobiny pyłu były nieruchome i rozmieszczone w sposób jednorodny, tworząc kulę (gwiazdę?). Jeśli jedyną siłą działającą na pyłki jest wzajemne przyciąganie grawitacyjne, to czy w czasie zapadania się kula pozostanie jednorodna? Jeśli nie, to czy gęstość będzie większa w środku kuli, czy przy jej powierzchni?

Jaka jest odpowiedź na te same pytania w odniesieniu do chmury pyłu o kształcie długiego walca? Uzasadnić wszystkie odpowiedzi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

464. Cienki pierścień o promieniu r jest naładowany równomiernie rozłożonym ładunkiem elektrycznym. W którym miejscu dipol elektryczny (układ dwóch bardzo dużych ładunków położonych w ustalonej, bardzo małej odległości od siebie) może pozostawać w równowadze w polu tego pierścienia?

465. W długim przewodniku prostoliniowym znajdującym się w próżni płynie prąd o natężeniu I. W polu magnetycznym tego przewodnika porusza się elektron, przy czym w chwili początkowej jego odległość od przewodnika wynosiła r_1, jego prędkość miała wartość v, a kierunek prędkości był równoległy do przewodnika, ze zwrotem zgodnym ze zwrotem prądu. Jaką (maksymalnie) odległość r_2 od przewodnika osiągnie elektron?

464. Dipol pozostaje w równowadze, jeśli:

a) jest ustawiony równolegle do pola elektrycznego – inaczej obróciłby się,
b) pole jest lokalnie jednorodne (ściśle: gradient pola jest równy zeru) – inaczej zostałby wciągnięty w obszar silniejszego pola.

Warunek b) jest spełniony w środku pierścienia oraz w dwóch punktach położonych symetrycznie na jego osi, gdyż natężenie pola jest równe zeru w środku, rośnie w miarę oddalania się od niego wzdłuż osi, a w dużej odległości znów maleje do zera. Wzór na wartość E w odległości d od środka pierścienia wynika ze zrzutowania wektora natężenia pola poszczególnych fragmentów pierścienia na kierunek osi:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{(d^2+r)^{3/2}}.$$

Maksymalną wartość E osiąga dla $d = r/\sqrt{2}$. Autor sądzi, że te dwa punkty są jedynymi punktami równowagi trwałej, a środek pierścienia – jedynym punktem równowagi nietrwałej, choć ścisły dowód tego byłby zapewne trudny.

465. Przyrównując siłę Lorentza do siły dośrodkowej, otrzymuje się znany wzór na promień okręgu zataczanego przez ciało naładowane w polu magnetycznym. Podstawiamy tu ładunek elementarny e:

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Gdy pole nie jest jednorodne (tu $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$), tor ciała nie jest okręgiem, a powyższy wzór opisuje promień jego krzywizny. Tak jak w przypadku ruchu po okręgu, prędkość v pozostaje stała. Tor ruchu elektronu i przewodnik leżą w jednej płaszczyźnie, a jeśli przedstawimy tor jako funkcję $y(r)$ (gdzie y jest współrzędną

Rozwiązanie zadania M 1233.
Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ będą danymi liczbami, które z dzielenia przez $2n$ dają odpowiednio reszty $r_1, r_2, \ldots, r_{n+2}$.

Jeśli $r_i = r_j$ dla pewnych liczb i, j ($i \neq j$), to liczba $a_i^2 - a_j^2$ jest podzielna przez $2n$. Przyjmijmy zatem, że liczby $r_1, r_2, \ldots, r_{n+2}$ są różne.

Zbiór $S = \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez $2n$ podzielmy na $n+1$ podzbiorów:

$$S = \{1, 2n-1\} \cup \{2, 2n-2\} \cup \cdots \cup \cup \{n-1, n+1\} \cup \{0\} \cup \{n\}.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że pewne dwie reszty r_i, r_j ($i \neq j$) spełniają równość $r_i + r_j = 2n$. Stąd wynika, że liczba $a_i^2 - a_j^2$ jest podzielna przez $2n$.

wzdłuż przewodnika, a r – odległością od niego), to promień krzywizny wynosi
$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$$
gdzie primami oznaczono pochodne. Oznaczając y' jako u, a stałe zbierając w wyrażeniu $A = \frac{2\pi mv}{\mu_0 eI}$, mamy równanie
$$Aru' = (1 + u^2)^{3/2}.$$
Całkujemy je metodą rozdzielania zmiennych, otrzymując
$$A\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$
W tych punktach toru, gdzie r osiąga wartość ekstremalną, u dąży do nieskończoności ze znakiem $+$ albo $-$, a lewa strona powyższego równania dąży do $\pm A$. Odejmujemy stronami równania z minimalną wartością r_1 i maksymalną r_2, stąd $\ln(r_2/r_1) = 2A$, a rozwiązaniem jest wzór
$$r_2 = r_1 \exp\left(\frac{4\pi mv}{\mu_0 eI}\right).$$

Oto nasz coroczny remanent – komentarze i uzupełnienia wynikające z nadesłanych rozwiązań.

Zadanie **442** [Zależność ogniskowej zestawu dwóch soczewek od ich wzajemnego ustawienia] (współczynnik trudności $WT = 1{,}56$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 6$). Rozwiązanie nadesłane przez **A. Idzika** było w zasadzie prawidłowe, ale czysto doświadczalne i pozbawione jakiejkolwiek interpretacji otrzymanych wyników. Za to jednak zostało bogato zilustrowane dołączonymi fotografiami, z których kilka reprodukujemy na okładce. Na ostatnim zdjęciu widzimy „wspólniczkę” – córkę i współpracownicę naszego Weterana. (A może by tak wprowadzić Rodzinną Ligę Zadaniową, na wzór niektórych konkursów telewizyjnych?) Pozostałe dobre rozwiązania pochodzą od **K. Kapci**, **K. Magiery**, **T. Wietechy**, **P. Bieniasa** i **T. Tkocza**. Chociaż zostały ocenione wyżej, nie mogą się równać z pracą Idzika-i-Córki pod względem oprawy wizualnej!

Zadanie **448** [Czy wprowadzenie poziomych przegród między szybami okiennymi polepszy, czy pogorszy izolację cieplną] ($WT = 2{,}65$, $LPR = 1$). Jedynym nadesłanym rozwiązaniem tego zadania była praca **K. Magiery**, oparta na przeprowadzonym doświadczeniu. Przyrząd naszego Czytelnika składał się z trzech równoległych szybek, z których dwie tworzyły zbiornik na gorącą wodę, a między środkową i trzecią znajdował się układ poprzecznych listewek. Pomiar temperatury przy trzeciej szybce był wykonany dwukrotnie – w pozycji pionowej listewek, oraz w pozycji poziomej. Otrzymany wniosek – że przegrody pogorszą izolację – jest zgodny z rozwiązaniem firmowym (choć chyba niezupełnie zgodny z zamieszczoną w pracy tabelką pomiarów).

Zadanie **449** [Impuls światła odbija się od zwierciadeł na dwóch zbliżających się do siebie statkach kosmicznych] ($WT = 3{,}25$, $LPR = 0$). Podane w treści zadania założenie $E_0 \ll mvc$ (dotyczące energii impulsu oraz masy i prędkości statków) pozostawia niejasność co do porównania E_0 z mv^2. Rozwiązanie firmowe było prawidłowe, o ile $E_0 \ll mv^2$, a w innym wypadku wymagało drobnej korekty. Ten punkt prawidłowo przedstawił w swoim liście **M. Koźlik** (jednak jego praca też zawierała błąd).

Zadanie **459** [Ładunek nad powierzchnią cieczy dielektrycznej, zależność wysokości „górki” od wysokości ładunku] ($WT = 3{,}25$, $LPR = 1$). Oprócz całkowicie zgodnego z firmowym rozwiązania **T. Wietechy** otrzymaliśmy też list (pozakonkursowy, bo wysłany z dużym opóźnieniem) od **A. Idzika**. Jego pomysł nie opiera się na minimalizacji energii całkowitej, lecz na równowadze sił. Siłę podnoszącą ciecz na jednostkę jej powierzchni oblicza p. Andrzej jako iloczyn natężenia pola przez gęstość powierzchniową ładunku σ, z kolei zaś σ uzależnia od natężenia pola i stałej dielektrycznej cieczy. Rozwiązanie wynika dalej z przyrównania siły do ciężaru „górki”, a wynik jest zgodny z opublikowanym w *Delcie*.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 461 zadaniach

Mateusz Łącki (Kraków)	42,38
Konrad Kapcia (Częstochowa)	41,36
Jerzy Witkowski (Radlin) [poprawiono drobną pomyłkę]	1 – 36,24
Marian Łupieżowiec (Zebrzydowice)	35,00
Krzysztof Magiera (Łosiów)	1 – 26,16
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 25,68
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	8 – 24,36
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	22,24
Tomasz Wietecha (Tarnów)	6 – 21,45
Jacek Konieczny (Poznań)	19,16
Ryszard Woźniak (Kraków)	12,74
Michał Koźlik (Gliwice)	8,98
Przemysław Bienias (Aleksandrów Łódzki)	8,58
Zbigniew Galias (Kraków)	1 – 8,15

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2006–2008 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (8), T. Wietecha (6), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Magiera, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach, J. Witkowski.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2009

Zadania z matematyki nr 575, 576

Redaguje Marcin E. KUCZMA

575. Rozważamy alfabet złożony z n liter, a w nim słowa o następującej własności: między dwoma wystąpieniami którejkolwiek litery, każda litera pojawia się co najwyżej jeden raz (tzn. zabronione są podciągi $x \ldots y \ldots y \ldots x$, również dla $y = x$). Ile jest takich słów o maksymalnej długości?

576. Dowieść, że dla liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leqslant \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}.$$

Zadanie 576 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2008

Przypominamy treść zadań:

567. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb rzeczywistych, dla których istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniająca równanie

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n} = ax + b \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

568. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Zakładamy, że liczba m jest względnie pierwsza z każdą z liczb k_i. Wykazać, że równanie

$$x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_n^{k_n} = y^m$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

567. Spróbujmy wziąć funkcję postaci $f(x) = Ax + B$; jej n-ta iteracja ma postać $A^n x + (A^{n-1} + \ldots + A + 1)B$. Aby funkcja f spełniała podany warunek (dla zadanych liczb a, b), wystarczy, by spełniony był układ równań

$$A^n = a, \qquad (A^{n-1} + \ldots + A + 1)B = b.$$

Gdy $a \geqslant 0$ lub gdy n jest liczbą nieparzystą, przyjmujemy $A = a^{1/n}$; wówczas suma w nawiasie w drugim równaniu jest niezerowa, co pozwala wyznaczyć B. Znalezione wartości A, B określają „dobrą” funkcję f.

Ta metoda nie działa, gdy n jest liczbą parzystą oraz $a < 0$. Wykażemy, że w tym przypadku nie istnieje żadna funkcja f o wymaganych własnościach. Przypuśćmy bowiem, że f jest taką funkcją. Jej n-ta iteracja $ax + b$ jest funkcją ściśle malejącą, więc różnowartościową. Zatem także f musi być różnowartościowa. Wraz z założeniem ciągłości wymusza to jej ścisłą monotoniczność. W konsekwencji funkcja $f \circ f$ jest ściśle rosnąca i wobec tego n-ta (parzysta) iteracja funkcji f nie może być *malejącą* funkcją $ax + b$.

Odpowiedź: dla n nieparzystych wszystkie pary (a, b) są dobre; dla n parzystych – wszystkie pary (a, b), w których $a \geqslant 0$.

568. Liczba m jest względnie pierwsza z iloczynem $K = k_1 k_2 \ldots k_n$. Istnieją zatem liczby naturalne s, t, dla których $tm - sK = 1$. Przyjmijmy $x_i = n^{sK/k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ oraz $y = n^t$. Tak określone liczby spełniają zadane równanie:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{k_i} = \sum_{i=1}^{n} n^{sK} = n \cdot n^{sK} = n^{sK+1} = n^{tm} = y^m.$$

Niestety, nie był to *Prima Aprilis*. „Przypomniana” w numerze kwietniowym treść zadania **551** była wprawdzie identyczna z tą podaną cztery miesiące wcześniej, na Gwiazdkę, ale – no cóż – z tym samym, wiernie skopiowanym, błędem. Niedbalstwo przy korekcie... To było zadanie o zespole folklorystycznym. Założenie miało brzmieć: „tancerz i trenował z tancerkami od 1 do $2i - 1$”. Zamiast tego – wydrukowane zostało „od i do $2i - 1$”. Firmowe rozwiązanie biegło jednak przy założeniu z wersji zamierzonej, błąd umknął uwadze.

Literówki zwykle albo są nieistotne albo – przeciwnie – powodują, że treść całkiem traci sens; czytelnicy widzą, że „coś jest nie tak” i zgadują, jak miało być. Tym razem jednak zadanie pozostało sensowne, uczestnicy ligi próbowali je

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 563 ($WT = 1{,}23$) i 564 ($WT = 2{,}50$) z numeru 6/2008

Jerzy Witkowski	4–42,80
Marcin Kasperski	2–42,50
Marek Prauza	3–39,95
Andrzej Idzik	39,53
Zbigniew Galias	1–39,34
Adam Woryna	1–38,97
Wojciech Maciak	35,69
Marek Spychała	33,34
Michał Kieza	2–32,56
Bartłomiej Dyda	4–31,69
Franciszek S. Sikorski	31,36
Tomasz Warszawski	2–30,39
Łukasz Garncarek	1–30,14
Paweł Najman	3–29,21
Jan Czardybon	28,27
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Tomasz Wietecha	7–25,08
Krzysztof Dorobisz	2–24,38
Zbigniew Skalik	1–23,93
Grzegorz Kozłowski	23,23
Tomasz Choczewski	21,03
Piotr Żmijewski	1–20,21
Piotr Kumor	10–20,13

Legenda (przykładowo): stan konta 7–25,08 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 25,08 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2006, 2007 lub 2008.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, ktorzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza, P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (10), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (6), W. Bednarek (4), D. Kurpiel, P. Najman (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, K. Dorobisz, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, T. Tkocz, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

w dobrej wierze rozwiązać... Oto fragmenty wiosennej wymiany korespondencji między redaktorem ligi a jednym z uczestników (**Jerzy Cisło**):

– Szkoda mi tego barwnego zadania o tańcach, ono mogło być ciekawe; i jestem nie w porządku wobec wszystkich, którzy włożyli wiele czasu i wysiłku we frustrujące zmagania z *wydrukowanym* zadaniem.

– Tylko jedna pomylona litera na tyle zadań? Nauczyłem się czegoś nowego i o żadnej frustracji nie ma mowy.

No, przez dwadzieścia parę lat nazbierało się tych pomyłek ciut więcej... Ale dziękujemy za krzepiące słowa!

A teraz akcent optymistyczny minionego sezonu: dziesięć czterdziestocztero-punktowych rund! Sztuki tej dokonał **Janusz Olszewski**, jako drugi uczestnik w historii ligi (przypomnijmy – pierwszym był **Piotr Kumor**). Czekamy na dalszych – no i czekamy może na pierwszą „jedenastkę" – pełną ćwiartkę naszej liczby-ikony.

Przejdźmy do omówienia najciekawszych zadań.

Zadanie **548** [$M(a,b) = |\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \leqslant a,\ y \leqslant b,\ x \perp y\}|$ dla $a, b \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \Rightarrow M(a,b) = \sum_{r\geqslant 1} \lfloor a/r \rfloor \lfloor b/r \rfloor \mu(r)$ (μ – funkcja Möbiusa)] (współczynnik trudności $WT = 2{,}24$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$). Chociaż treść mogła wyglądać odstraszająco, zadanie okazało się niezbyt trudne. Większość rozwiązań (w tym i autorskie, i firmowe) polegała na standardowym użyciu wzoru włączeń i wyłączeń. Jednak najbardziej eleganckie rozwiązanie przedstawił **Jacek Jendrej**:

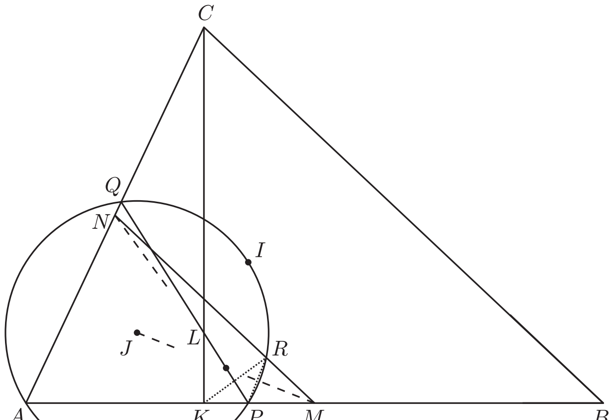
Dopuszczając w określeniu M rzeczywiste wartości a, b, widzimy, że dla $d \in \mathbb{N}$ jest dokładnie $M(a/d, b/d)$ par $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ spełniających warunki $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $NWD(x,y) = d$. Zatem

$$\lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor = \sum_{d\geqslant 1} M\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

Stąd wobec znanej tożsamości $\sum_{r|m} \mu(r) = 0$ dla $m > 1$:

$$\sum_{r\geqslant 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r) = \sum_{r\geqslant 1} \mu(r) \sum_{d\geqslant 1} M\left(\frac{a}{rd}, \frac{b}{rd}\right) = \sum_{m\geqslant 1} M\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) \sum_{r|m} \mu(r) = M\left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) = M(a,b).$$

Zadanie **549** [$\triangle ABC$; $c > a > b$; CK – wysokość; M, N – środki AB, AC; okrąg wpisany w $\triangle ABC$ styczny do AB, AC w punktach $P, Q \Rightarrow$ okrąg wpisany w $\triangle KMN$ ma środek na PQ] ($WT = 2{,}92$; $LPR = 10$). Znów **J. Jendrej** jest autorem ciekawego rozwiązania:



Niech I, J będą środkami okręgów wpisanych w $\triangle ABC$ i $\triangle AMN$. Okrąg o środku J i średnicy AI (przechodzący przez P, Q) przecina odcinek MN w punkcie R, symetrycznym do P względem MJ oraz symetrycznym do A względem NJ. Zatem dwusieczna MJ kąta KMN jest symetralną odcinka PR; a wobec równości $|NR| = |NA| = |NK|$, dwusieczna kąta KNM jest symetralną odcinka KR. Należy więc dowieść, że środek okręgu KPR leży na PQ. Okaże się, że jest nim środek odcinka PL, gdzie $L = PQ \cap CK$. Wystarczy wykazać, że R leży na okręgu KLP, czyli że $|\sphericalangle KRP| = |\sphericalangle KLP|$ – to zaś wynika z prostego rachunku na kątach, który zostawimy Czytelnikowi.

Podobne rozwiązanie przysłał też **Janusz Olszewski** – dołączając do swojej pracy, dla pełniejszego obrazu, drugie rozwiązanie, analogiczne do firmowego. Inne prace z rozwiązaniem firmowym: **J. Bogdanowicz**, **T. Choczewski**, **K. Dorobisz**, **J. Jelisiejew**, **R. Pytlak**. Ponadto trzy rozwiązania rachunkowe (układ współrzędnych bądź trygonometria).

Zadanie **551** [Tancerz $i \in \langle 1; n\rangle$ trenował z tancerkami $j \in \langle i; 2i-1\rangle$; ile możliwości skojarzenia r par?] ($WT = 4{,}00$; $LPR = 0$)**.** Tak sformułowane (w wyniku wspomnianej pomyłki) zadanie wygląda raczej beznadziejnie. Dwaj uczestnicy przysłali listy zatytułowane *Komentarz zamiast rozwiązania*.

Niech $A = [a_{ij}]_{i\leqslant n,\, j\leqslant 2n-1}$ będzie macierzą incydencji ($a_{ij} = 1$ gdy tancerz i trenował z tancerką j; poza tym $a_{ij} = 0$). Ile jest możliwości wybrania r jedynek, z których żadne dwie nie stoją w jednym wierszu ani kolumnie?

J. Olszewski zauważa, że w obrębie ustalonej podmacierzy R o wymiarach $r \times r$ liczba takich wyborów, oznaczana symbolem $\mathrm{per}(R)$, jest dana wzorem jak w definicji $\det(R)$, po zastąpieniu wszystkich minusów plusami (podaje też odsyłacz do strony www.codeproject.com/KB/applications/RyserPermanent.aspx gdzie można znaleźć praktyczny algorytm obliczający $\mathrm{per}(R)$). Szukana liczba jest więc równa $\sum_R \mathrm{per}(R)$; sumowanie po wszystkich podmacierzach $r \times r$ macierzy A – nie jest to jednak „wynik”, w oczekiwanym znaczeniu: funkcja zmiennych n, r, dana jawnym wzorem algebraicznym.

J. Cisło zaś odsyła do książki V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, gdzie w rozdziale 12 pokazana jest ogólna metoda generowania wielomianów tworzących dla ciągów wyrażających liczbę rozważanych wyborów (dla dowonej macierzy zerojedynkowej).

Nie widać, żeby którakolwiek z tych metod prowadziła do wyniku w zwartej postaci.

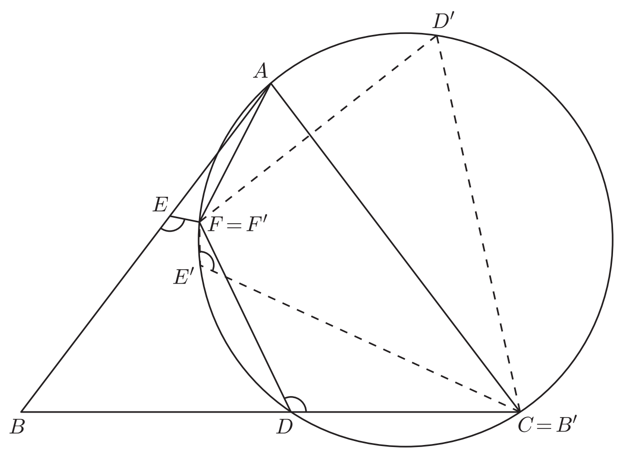
Zadanie **558** [$m, n, x \in \mathbb{N}$; $n \,|\, 1 + x + \ldots + x^{m-1}$; $m \,|\, 1 + x + \ldots + x^{n-1}$; $m \perp n$; $m = ?$ $n = ?$] ($WT = 2{,}78$; $LPR = 6$)**.** Wszystkie rozwiązania jak firmowe: **J. Jelisiejew**, **J. Jendrej**, **J. Olszewski**, **T. Warszawski**, **A. Woryna** oraz **K. Dorobisz** (autor zadania).

Zadanie **559** [Plansza $n \times n$; naprzemienne zajmowanie pól; pozycja zwycięska: zajęte cztery narożniki prostokąta; kto wygrywa?] ($WT = 2{,}42$; $LPR = 4(8?)$)**.** Gdy n jest liczbą nieparzystą, wygrywa rozpoczynający; gdy parzystą – jego przeciwnik. Strategię opisaną w rozwiązaniu firmowym, z pełnym uzasadnieniem, znaleźli **M. Kasperski**, **W. Świeboda**, **A. Woryna**.

Inna skuteczna strategia polega na tym, by – w każdym ruchu, w którym nie da się od razu wygrać – zajmować pole środkowo-symetryczne do pola z ruchu przeciwnika. Dla n nieparzystych pierwszy gracz zajmuje na starcie pole centralne, po czym stosuje imitację symetryczną i wygrywa; dla n parzystych wygrywa tą metodą drugi gracz. Skuteczność dla n parzystego jest dość oczywista. Dla n nieparzystego – próba dowodu nie wprost prowadzi do rozważania hipotetycznej (wyprodukowanej przez pierwszego gracza) trójki zajętych narożników prostokąta. Dokładniejszej analizy wymagają wówczas przypadki, gdy jeden z tych trzech narożników jest polem centralnym planszy, bądź też gdy dwa z nich leżą symetrycznie względem środka. Bardzo staranne rozwiązanie tą metodą przedstawił **K. Dorobisz**.

Jeszcze kilku uczestników podało rozwiązania zasadniczo poprawne (jedną lub drugą metodą), z mniejszą troską o szczegóły.

Zadanie **562** [$\triangle ABC$; $|AB| = |AC|$; punkt D na boku BC; punkt F na okręgu ACD, wewnątrz $\triangle ABC$; punkt E na okręgu BDF, na boku AB $\Rightarrow$ $|CD|\cdot|EF| + |DF|\cdot|AE| = |BD|\cdot|AF|$] ($WT = 2{,}68$; $LPR = 7$)**.** Zgrabne rozwiązanie przedstawili **J. Cisło** i (bardzo podobnie) **T. Tkocz**.



Z warunków zadania łatwo wynika, że czworokąty $FDCA$ i $FEBD$ mają kąty odpowiednio równe. W okrąg ADC wpisujemy czworokąt $F'E'B'D'$ podobny do $FEBD$ (i tak samo zorientowany) tak, by $F' = F$. Ma on kąty takie, jak $FDCA$, a zatem $B' = C$ oraz $|AD'| = |DE'|$. Twierdzenie Ptolemeusza dla czworokątów $FE'DC$ i $FCD'A$ daje równości

$$|DF| \cdot |B'E'| - |CD| \cdot |E'F'| = \pm|CF| \cdot |DE'|,$$
$$|AC| \cdot |D'F'| - |AF| \cdot |B'D'| = \pm|CF| \cdot |AD'|$$

(jednocześnie znak plus lub minus, zależnie od uporządkowania punktów na okręgu). Prawe strony są równe. W równości uzyskanej z przyrównania lewych stron można pominąć „primy” (bo $F'E'B'D' \sim FEBD$); dzięki zależności $|AC| - |BE| = |AE|$, wychodzi równość z tezy.

A. Woryna wskazał liczne pary trójkątów podobnych, uzyskując również ładny dowód. **M. Kieza**, autor zadania, jest też autorem rozwiązania firmowego; takie samo znalazł **J. Olszewski**. Trygonometrycznie: **K. Dorobisz**, **P. Najman**.