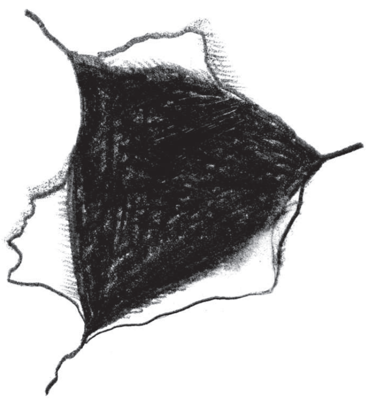
Czarne dziury w weekend – przewodnik praktyczny

Bożena CZERNY

Ogólna teoria względności (OTW) jest koncepcyjnie prosta, gdy się już ją uda zrozumieć. Materia wypełniająca przestrzeń (dokładniej – czasoprzestrzeń) określa geometrię tej czasoprzestrzeni, a geometria czasoprzestrzeni określa z kolei jak wygląda ruch materii. Jednak matematyczna strona tej teorii jest bardzo złożona i wykład uniwersytecki, zapoznający studentów z podstawami OTW, trwa zazwyczaj cały rok. Albert Einstein też się zresztą sporo namęczył, zanim ubrał swoją ideę w postać matematycznych równań. Co więc można zrobić w weekend? Proszę poczytać dalej.



Ale najpierw dygresja. Warto czasami pójść do księgarni i rozejrzeć się. Jest tam pełno podręczników obiecujących naukę czegoś w weekend. Ja kiedyś kupiłam dla siebie i syna książeczkę pod tytułem „Nauka narciarstwa w weekend”. Nabyliśmy też używane narty i na stok! Tak więc sobie teraz pomyślałam, że skoro kiedyś ktoś potrafiący jeździć na nartach zechciał napisać takie dzieło dla tych, którzy nie opanowali tej trudnej sztuki, to może ja się teraz odwdzięczę i, jako osoba nieco wtajemniczona, przybliżę OTW tym, którzy jej nie znają na tyle, aby sami mogli sobie coś obliczyć.

Oczywiście, nie da się opisać w uproszczony sposób sytuacji najbardziej ogólnej, ale trzeba się skupić na stosunkowo prostym zagadnieniu. Skupię się więc na opisie czarnej dziury.

Czarna dziura to ekstremalny przejaw OTW. Na trop jej istnienia natrafiono jednak już dużo wcześniej, niż powstała OTW. Pierwszy zasugerował to w bardzo przekonujący sposób John Mitchell w roku 1784. Rozważył on po prostu problem prędkości ucieczki z powierzchni ciała o masie M i promieniu R. Prędkość ucieczki łatwo obliczyć w ramach teorii Newtona – wystarczy określić, dla jakiej prędkości energia całkowita cząstki o masie m (energia kinetyczna plus energia potencjalna) jest równa 0 (G oznacza stałą grawitacji):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathrm{G}Mm}{R} = 0.$$

Masa cząstki m skróci się w tych rachunkach i otrzymamy

$$v = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{R}},$$

znaną nam wszystkim drugą prędkość kosmiczną. Ale Mitchell pomyślał: co będzie, jeżeli rozważymy światło, które ma znaną prędkość c (300 000 km/s)? Okaże się wówczas, że dla znanej masy mamy pewną charakterystyczną wartość promienia

$$R_S = \frac{2\mathrm{G}M}{\mathrm{c}^2}.$$

Jeżeli jakieś ciało przy tej samej masie miałoby mniejszy promień, to prędkość ucieczki byłaby większa niż prędkość światła. A zatem światło nie mogłoby wydostać się z takiej gwiazdy i dotrzeć do odległego obserwatora! Taka gwiazda wydawałaby się czarna (nie świeciłaby) i – jak zauważył Mitchell – jej obecność można by wykryć tylko dzięki jej oddziaływaniu grawitacyjnemu na ruch innych, świecących ciał.

Taka prosta argumentacja nie musi być poprawna, ponieważ – jak teraz wiemy – teoria Newtona stosuje się tylko do ciał poruszających się z małymi prędkościami w stosunku do światła. A jednak w tym akurat wypadku wszystko jest w porządku – OTW w pewnym sensie potwierdza taki dokładnie wynik! Mówiąc precyzyjniej, wkrótce po sformułowaniu OTW przez Einsteina Karl Schwarzschild znalazł ścisłe rozwiązanie równań opisujących pole grawitacyjne wokół sferycznie symetrycznej masy w obszarze, gdzie masy już nie ma (tzw. rozwiązanie próżniowe). Rozmiar źródła pola grawitacyjnego nie ma w tym przypadku znaczenia. Może to być duża gwiazda – jak Słońce, albo coś bardziej zwartego. Ale jeżeli jest to coś bardziej zwartego, to w opisie pola

Rozwiązania zadań lingwistycznych

Zadanie 1.
1. Apostrof oznacza długość, jeżeli znajduje się po samogłosce, a czyta się jako [ə], jeżeli jest po spółgłosce.
2. Litera *w* oznacza zaokrąglenie warg, jeżeli znajduje się po spółgłosce, a głoskę [ʷ] w pozostałych przypadkach.
3. [ə] wymawia się, chociaż nie jest zapisywane, między dowolną spółgłoską i następującą sonorną ([l m n]).
4. [ə] jest wymawiane także przed grupami spółgłosek na początku wyrazów.
5. *p t j g gw q qw* są wymawiane jako dźwięczne spółgłoski ([b d j g gʷ ɣ ɣʷ]) na początku wyrazu i między samogłoskami, a jako bezdźwięczne ([p t c k kʷ x xʷ]) na końcu wyrazu oraz w sąsiedztwie innej spółgłoski.
Odpowiedzi.
(a) [əksənxōɣon], [ətkəbox], [gəmūjəmin], [emtoɣʷatk], [dēbəlc];
(b) tp'te'sn, mtesgm, alapt'g, glamen.

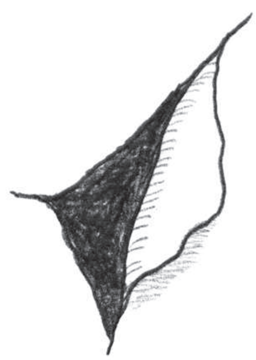
grawitacyjnego pojawia się czynnik $1 - \frac{2GM}{rc^2}$, który jest równy zeru dokładnie dla $r = R_S$, stąd wartość tego promienia nosi nazwę promienia Schwarzschilda. Jego wartość określa horyzont czarnej dziury.

O tym, co charakteryzuje czarną dziurę, można przeczytać w wielu książkach popularno-naukowych, więc nie o tym będę pisać, skoro obiecałam rachunki z uwzględnieniem efektów OTW. Poza tym to, co pod horyzontem, jest mało interesujące, bo i tak tego nie widać. Interesujący jest ruch cząstek **ponad** horyzontem, bo tylko obserwując go wykryjemy czarną dziurę.

Ruch cząstek w mechanice Newtona możemy śledzić, ponieważ znamy postać potencjału pola grawitacyjnego $\Psi = -\frac{GM}{r}$ i oczywiście nie ma w nim miejsca na jakiś „horyzont". To co zrobić, żeby było? Proste, wystarczy napisać, że

$$\Psi = -\frac{GM}{r - R_S}.$$

Coś takiego zapowiada się już znacznie lepiej, ponieważ widać, że przy horyzoncie czarnej dziury, czyli dla r dążącego do R_S, potencjał ten dąży do nieskończoności, a rachunki należy ograniczyć do obszaru $r > R_S$. I już! Najważniejsza część kursu „Czarne dziury w weekend" za nami. Teraz pozostaje zobaczyć, co oznacza ta modyfikacja, czy ma ciekawe konsekwencje, no i wspomnieć, jak to się ma do „uczciwych" rachunków.



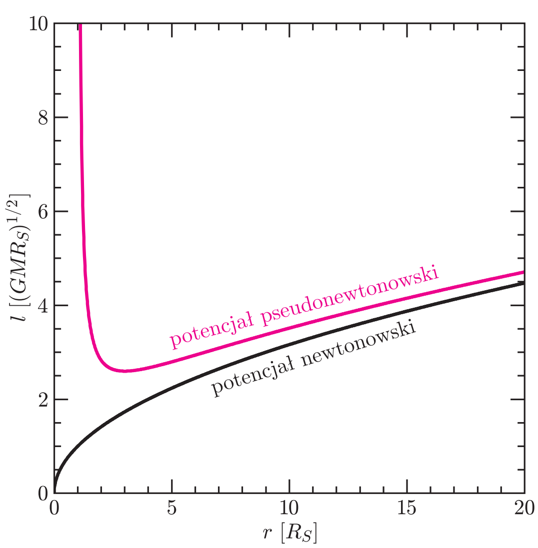
Ciekawy, a zarazem stosunkowo prosty, jest przypadek ruchu po okręgu. Prędkość w ruchu po okręgu wyznacza się z warunku, że siła grawitacyjna jest siłą dośrodkową. Kinematykę pożyczamy z mechaniki Newtona, gdzie siła dośrodkowa zależy od promienia orbity r i prędkości v_k jak $F_{\text{doś}} = mv_k^2/r$. Siłę grawitacyjną musimy jednak teraz obliczyć z nowego potencjału. Robi się to przez zróżniczkowanie potencjału i pomnożenie przez masę cząstki, co daje

$$F_{\text{graw}} = \frac{GMm}{(r - R_S)^2}.$$

Zatem już możemy określić prędkość cząstki na orbicie kołowej wokół czarnej dziury jako

$$v_k = \frac{\sqrt{GMr}}{r - R_S}.$$

Widać, że – jak w mechanice Newtona – dla dużych promieni prędkość spada jak odwrotność pierwiastka z r (bo wtedy $r - R_S$ jest prawie równe r), a dla malejących wartości promienia rośnie do nieskończoności. Jedyna różnica jest taka, że teraz ta nieskończoność nie jest w $r = 0$, lecz w $r = R_S$.



Rys. 1. Rozkład gęstości momentu pędu

A jednak zmiana jest istotna, a nie tylko kosmetyczna. Widać to wyraźnie dopiero wtedy, gdy określimy nie prędkość, lecz moment pędu na orbicie kołowej. Ze szkoły wiadomo, że moment pędu cząstki o jednostkowej masie na takiej orbicie to prędkość pomnożona przez r, czyli $l_k = \sqrt{GMr^3}/(r - R_S)$. Widać, że moment pędu (na jednostkę masy) rośnie do nieskończoności, gdy zbliżamy się do horyzontu czarnej dziury! To już wygląda dramatycznie odmiennie od sytuacji w teorii Newtona. W niej bowiem moment pędu na orbicie kołowej (zerowy w $r = 0$) rośnie monotonicznie z odległością r. Tu nie. Z wykresu tego nowego momentu pędu (rys. 1) widać, że w dużej odległości od czarnej dziury rośnie on wraz z r jak w teorii Newtona, ale w pewnej odległości ma minimum, a bliżej rośnie z malejącym r!

Jeżeli ktoś potrafi różniczkować, to może osobiście obliczyć, dla jakiego promienia występuje to minimum. W tym celu wystarczy obliczyć pochodną funkcji $l_k(r)$ względem r i przyrównać ją do zera. Wynik tego ćwiczenia to ładna wielkość

$$R_{\text{ISCO}} = 3R_S.$$

Jej nazwa jest nieco skomplikowana, ale sprawa zaraz się wyjaśni.

Zadanie 2.
(a) Każdy wers zawiera 6 sylab. Obowiązuje aliteracja (por. treść zadania), natomiast rym wewnętrzny tworzy się według następujących zasad: oznaczmy samogłoski (i ich połączenia) występujące w jednym wersie kolejno przez V1, V2, ..., V6. Przynajmniej jedna spółgłoska, która znajduje się bezpośrednio po V5, powinna znajdować się bezpośrednio po Vn dla $n = 1$, 2 albo 3. W wersach parzystych jest przy tym Vn = V5. Porównaj na przykład wersy IV,1–6 (aliteracja jest zaznaczona czcionką półtłustą, rymy wewnętrzne są podkreślone):

IV
1 háði **g**ramr, þars **g**núðu,
2 **g**eira hregg við seggi,
3 (rauð fnýsti **b**en **b**lóði)
4 **b**ryngǫgl í dyn Skǫglar,
5 þás á **r**ausn fyr **r**æsi
6 (**r**éð egglituðr) seggir ...

(b) **V**
1 ***r****íks* (þreifsk **r**eiddra øxa
2 ***r****ymr*; knǫttu spjǫr *glymja*)
3 ***s****vartskyggð* bitu **s**eggi
4 ***s****verð* þjóðkonungs ferðar,
5 þás (***h****ugfyldra* hǫlða)
6 ***h****laut andskoti Gauta*
7 (hǫr vas ***s****ǫngr* of ***s****vírum*)
8 ***s****igr* (flugbeiddra *vigra*).

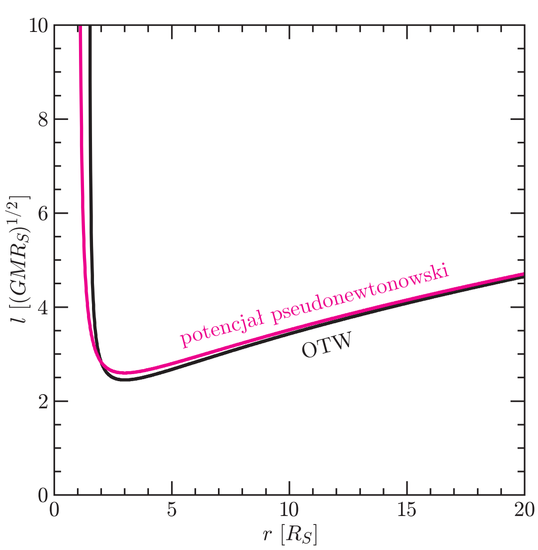
Pozostałe wyrazy to: hoegra i smíði.

Zastanówmy się, jakie konsekwencje ma fakt, że w nowym potencjale moment pędu na orbicie kołowej ma minimum. Wyobraźmy sobie, że jakieś cząstki krążą na orbitach kołowych wokół czarnej dziury. Aby przejść na niższą orbitę, cząstka zazwyczaj musi wytracić część swojego momentu pędu. Tak jest zawsze w teorii Newtona, tak też jest i teraz, jeżeli tylko orbita cząstki jest większa niż R_{ISCO}. Mówimy, że istnieje bariera momentu pędu, zapobiegająca opadaniu materii na obiekt centralny. W teorii Newtona taka bariera istnieje zawsze, dla wszystkich orbit kołowych. Teraz natomiast mamy taką sytuację, że jeżeli cząstka jakoś utraci tyle momentu pędu, że znajdzie się na orbicie $r = R_{\mathrm{ISCO}}$, to dalej może spadać na czarną dziurę już bez utraty momentu pędu. Dla mniejszych promieni naturalny moment pędu na orbicie kołowej jest wszak większy, nie ma więc możliwości, by znalazły się tam jakieś cząstki. O takich orbitach mówimy, że są niestabilne. Najdrobniejsze zaburzenie powoduje, że cząstka zmienia charakter ruchu – w tym wypadku spada na czarną dziurę. Dlatego orbita $r = R_{\mathrm{ISCO}}$ nazywa się po angielsku *Innermost Stable Circular Orbit*, tj. Najbardziej Wewnętrzna Stabilna Orbita Kołowa, stąd skrót ISCO.

Czy taka ciekawostka może mieć jakieś „praktyczne" konsekwencje? Otóż ma. Astronomia współczesna sporą część swojej aktywności poświęca obserwacjom opadania materii na czarne dziury. Dzięki czarnym dziurom działają słynne kwazary, tj. źródła promieniowania o jasnościach przewyższających setki i tysiące razy łączne świecenie gwiazd macierzystej galaktyki, w której czarna dziura się znajduje. Tak samo działają źródła promieniowania rentgenowskiego w naszej Galaktyce, a także w pobliskich galaktykach, gdzie ostatnio też udaje się je dostrzec. Galaktyczne obiekty zawierające czarne dziury świecą nie tak jasno, bo ich masy są niewielkie, zaledwie kilka czy kilkanaście razy większe od masy Słońca, podczas gdy czarne dziury w kwazarach mogą mieć masy nawet bliskie dziesięciu miliardom mas Słońca, mogą więc wychwycić grawitacyjnie znacznie więcej gazu ze swojego otoczenia, przez co gaz ten może wyprodukować więcej promieniowania.

Mechanizm produkcji energii jest ten sam w obu typach obiektów. Materia – stosunkowo chłodny gaz o znacznym momencie pędu – napływa z otoczenia i osiada na kołowych orbitach wokół czarnej dziury. Materii jest sporo, więc w wyniku turbulencji kłębi się ona, powoli traci moment pędu na rzecz odległych obszarów i dryfuje do środka. Prędkość tego dryfu jest tysiące razy mniejsza od prędkości ruchu orbitalnego. Tak wygląda dysk akrecyjny.

Jak daleko od środka on się rozciąga? Do samego horyzontu czarnej dziury? Tak podpowiadałaby mechanika Newtona, ale według udawanej OTW jest inaczej: dysk akrecyjny sięga tylko do R_{ISCO}, a głębiej materia już tylko szybko, wręcz błyskawicznie spada. Może to więc wyglądać tak, że w centrum mamy czarną dziurę o promieniu horyzontu R_S, dalej pierścieniową przerwę do $R_{\mathrm{ISCO}} = 3R_S$, a dalej dysk akrecyjny. Niestety, obserwacje nie osiągnęły jeszcze dostatecznej zdolności rozdzielczej, by taki obraz zobaczyć. Jednak z jednej strony w przeciągu 10–20 lat powinno to stać się możliwe, gdyż rozwój technik interferometrycznych jest oszałamiający, a z drugiej strony astronomowie próbują to zobaczyć pośrednio, przez badanie widma promieniowania obiektów zawierających czarne dziury. To jednak jest już inna historia.



Rys. 2. Rozkład gęstości momentu pędu

A co z tym dziwnym potencjałem? Otóż zgodnie z nim przebieg momentu pędu na orbicie kołowej wokół nierotującej czarnej dziury jest imponująco podobny do przewidywanego przez metrykę Schwarzschilda (rys. 2). W szczególności wartość promienia, gdzie moment pędu ma minimum, odtwarza się dokładnie; ścisła wartość to naprawdę $3R_S$! Niestety, OTW przewiduje również możliwość, że źródło pola grawitacyjnego ma moment pędu (mówimy, że czarna dziura rotuje), a wtedy pole grawitacyjne zależy od tego momentu pędu – im jest on większy, tym mniejszy jest horyzont

Zadanie 3. W obu językach przydawka następuje po wyrazie określanym.

(a)
jun – kość,
i-jun – szkielet (mnóstwo kości),
i-wahnawa – wiązka bananów (mnóstwo bananów),
i-drai – kalendarz (mnóstwo dni),
drai-hmitrötr – niedziela (święty dzień),
gaa-hmitrötr – sanktuarium (święte miejsce),
uma-hmitrötr – kościół (święty dom),
ngöne-uma – ściana (granica domu),
ngöne-gejë – wybrzeże (granica wody),
nyine-thin – szydło (narzędzie kłuć),
tii – pisać,
bé-tii – ołówek (narzędzie pisać),
bé-wöli – widelec (narzędzie kłuć),
wöta – zwierzę,
bé-wöli-wöta – ostroga (narzędzie kłuć zwierzę),
bé-ôdu – szklanka (narzędzie pić),
ba-jié – wybrzeże (granica wody),
ba-bwén – zmierzch (granica nocy),
a-pulut – łóżko (miejsce spać).

(b)
wahnawa 'banan', *drai* 'dzień';
wöli 'kłuć', *pulut* 'spać'.

(c)
i-bii 'rój pszczół (mnóstwo pszczół)',
tusi-hmitrötr 'Biblia (święta księga)'.

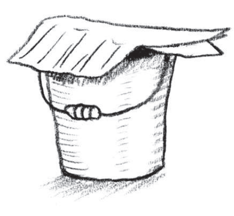
czarnej dziury i promień najbardziej wewnętrznej stabilnej orbity kołowej (jeżeli cząstka krąży w tym samym kierunku, w którym obraca się czarna dziura). Tego już nie da się odtworzyć bez porządnego nauczenia się OTW. Obserwacje jednak nie są jeszcze tak precyzyjne, żeby tę rotację czarnej dziury można było wyznaczać w sposób godny zaufania (choć oczywiście są liczne próby i metody podejścia do tego zagadnienia). W wielu więc przypadkach warto ten dziwny potencjał zastosować i tak też się robi.

A skąd on się w ogóle wziął? Wymyślił go niedawno zmarły prof. Bohdan Paczyński, gdy jeszcze pracował w Warszawie, pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Prof. Paczyński bardzo się wtedy zainteresował problemem akrecji materii na czarną dziurę, zderzył się jednak z obliczeniowymi trudnościami piętrzącymi się w samej OTW. Przez pewien czas pracował z pomocą specjalistów w tej dziedzinie, ale w końcu uznał, że właściwie nie ma powodów męczyć się z zaawansowanym formalizmem, skoro wtedy i tak nie było wiadomo, co się w pobliżu czarnej dziury dzieje (teraz jest nieco lepiej, ale też nie wszystko wiemy). No i wymyślił potencjał przedstawiony w tym artykule i opublikował w 1980 roku. Praca ta była już cytowana w literaturze ponad 500 razy, co jest naprawdę dobrym wynikiem w astronomii. W praktyce przypadków jej użycia było więcej, gdyż wielokrotnie nie była ona wspominana, jak nie wspomina się formalnie publikacji Einsteina, pisząc o OTW.

Mam więc nadzieję, że drogi Czytelnik, po przeczytaniu tego tekstu, poznał jakąś część OTW. Co prawda, chyba w takim stopniu, w jakim ja w weekend nauczyłam się jeździć na nartach. Po zapoznaniu się z książką nie zaczęłam od razu z wdziękiem śmigać po stoku, na co po cichu liczyłam, udało mi się jednak zjechać z górki w sposób kontrolowany i nabrałam przekonania, że jazdy na nartach można się nauczyć, tylko trzeba dalej próbować. To samo jest z OTW. Tak więc życzę miłego dalszego próbowania.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

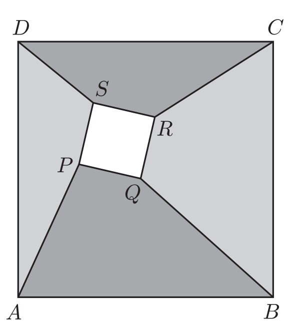


F 733. Kiedyś w czasie mroźnych zim przykrywano gazetą stojące w sieni wiadro z wodą. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 15

F 734. W niektórych starych zegarach, przeznaczonych do pracy na odkrytym powietrzu, wahadło składa się z długiej rurki zakończonej pojemnikiem z rtęcią. Czemu służyła taka konstrukcja wahadła?
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1231. Liczby całkowite dodatnie spełniają warunek
$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2.$$
Wykazać, że liczba $a + b + c + d$ jest liczbą złożoną.
Rozwiązanie na str. 7



M 1232. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ umieszczono (w dowolnym miejscu) kwadrat $PQRS$, jak pokazano na rysunku. Dowieść, że suma pól czworokątów $ABQP$ i $CDSR$ jest równa sumie pól czworokątów $DAPS$ i $BCRQ$.

Uwaga: Ta oraz kilka innych konfiguracji geometrycznych dotyczących „równych sum pól" przedstawione zostały na plakacie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (zob. okładka).
Rozwiązanie na str. 24

M 1233. Udowodnić, że spośród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych ($n \geqslant 1$) można wybrać takie dwie a, b, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez $2n$.
Rozwiązanie na str. 18