Punkty charakterystyczne na prostej Eulera

Martha UBIK

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w XXX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2008 roku.

W geometrii często spotykamy się z obiektami, które, chociaż zdefiniowane jednym zdaniem, kryją w sobie wiele tajemnic. Moja praca traktowała o jednym z nich, a mianowicie o **prostej Eulera**. Jest to prosta, do której należą ortocentrum H, środek ciężkości G oraz środek O okręgu opisanego na danym trójkącie. W istocie, te punkty są współliniowe.

O podobnych problemach można poczytać np. w: V. Prasolov, *Problems in Plane and Solid Geometry.*

Dowód. Niech X, Y, Z będą odpowiednio środkami boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Trójkąt XYZ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{2}$. Wysokości w trójkącie XYZ przecinają się w punkcie O, więc $OX : HA = 1 : 2$.

Niech G' będzie punktem przecięcia odcinków OH i AX. Zatem $AG' : G'X = OX : HA = 1 : 2$, więc $G' = G$ oraz $OG' : G'H = OX : HA = 1 : 2$, z czego otrzymujemy, że odległość środka ciężkości od ortocentrum jest dwa razy większa niż jego odległość od środka okręgu opisanego na trójkącie. □

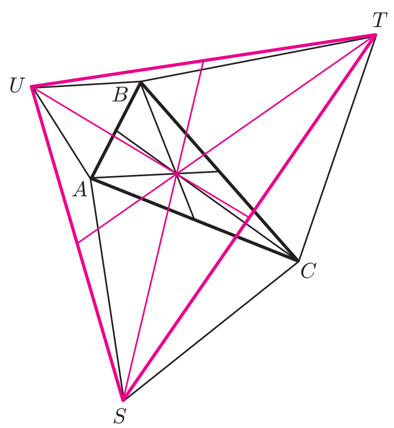
Okrąg Eulera nazywany jest również okręgiem Feuerbacha lub okręgiem dziewięciu punktów.

Ponadto na prostej Eulera leży środek okręgu Eulera, a więc okręgu, na którym leżą spodki wysokości, środki boków oraz punkty Eulera danego trójkąta.

Punkty Eulera są to środki odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w jednym z wierzchołków danego trójkąta (S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*).

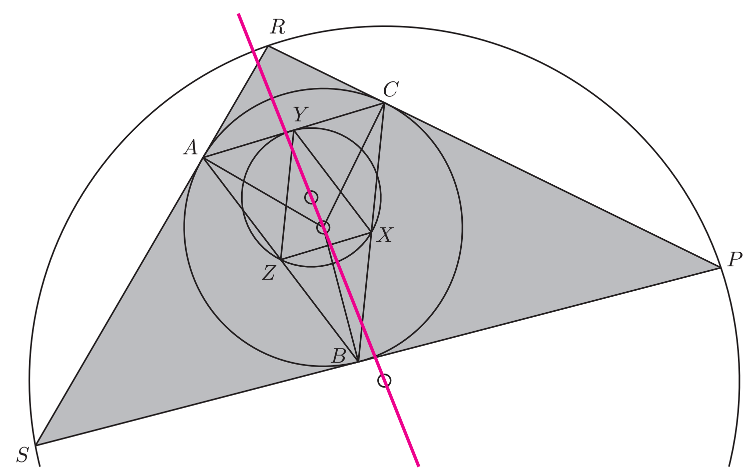
W rzeczywistości jednak należy do niej wiele innych punktów charakterystycznych trójkąta. W pracy postarałam się wskazać kilka z nich, a także zdefiniować te najbardziej znane trochę inaczej.

Poniżej przedstawiam kilka twierdzeń z mojej pracy. Zachęcam do udowodnienia tych, które są podane bez dowodu.



Twierdzenie 1. *Na bokach trójkąta ABC po ich zewnętrznej stronie zbudowano trójkąty równoboczne AUB, BTC i CSA. Środki ciężkości trójkątów ABC i STU pokrywają się* (rysunek obok).

Twierdzenie 2. *Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach A, B oraz C. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono przez P, R oraz S. Środek okręgu opisanego na trójkącie PRS leży na prostej Eulera trójkąta ABC.*



Jeśli proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie, to punkt ich przecięcia jest środkiem perspektywy trójkątów ABC i XYZ.

Twierdzenie 3. *Środek perspektywy trójkąta spodkowego oraz trójkąta PRS zdefiniowanego powyżej leży na prostej Eulera trójkąta ABC.*

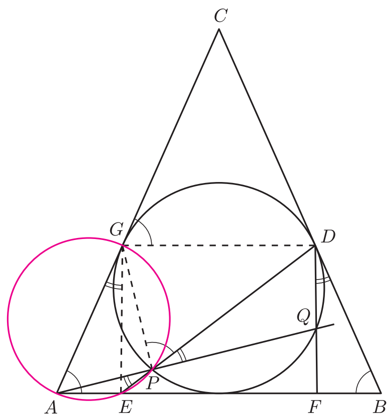
Dowód. Oznaczmy przez H_A, H_B oraz H_C spodki wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B i C. Zauważmy, że

$$\sphericalangle H_CH_AB = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AH_AH_C = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACH_C,$$

gdyż na czworokącie ACH_AH_C można opisać okrąg ($\sphericalangle CH_CA = \sphericalangle AH_AC = \frac{\pi}{2}$). Stąd

$$\sphericalangle H_CH_AB = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle CAB\right) = \sphericalangle CAB.$$

Rozwiązanie zadania M 1229.
Rozwiążemy zadanie przy założeniu, że punkt D nie leży między prostymi AB i AP (rysunek). Dowód w pozostałym przypadku jest analogiczny.



Oznaczmy przez G punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC. Wówczas

$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle CGD = \sphericalangle GPD,$$

skąd wynika, że punkty A, E, P, G leżą na jednym okręgu. Wobec tego

$$\sphericalangle AGE = \sphericalangle APE = \sphericalangle DPQ = \sphericalangle BDF.$$

Równość ta w połączeniu z zależnościami $AG = BD$ oraz $\sphericalangle GAE = \sphericalangle DBF$ dowodzi, że trójkąty AGE i BDF są przystające. A zatem $AE = BF$.

I analogicznie:

$$\sphericalangle H_BH_AC = \sphericalangle CAB,$$
$$\sphericalangle H_AH_CB = \sphericalangle H_BH_CA = \sphericalangle BCA,$$
$$\sphericalangle H_AH_BC = \sphericalangle H_CH_BA = \sphericalangle ABC.$$

Korzystając z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, mamy ponadto:

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle RCA = \sphericalangle CBA, \quad \sphericalangle SAB = \sphericalangle ACB.$$

Zatem trójkąty $H_AH_BH_C$ i PRS mają parami równoległe boki, a więc są podobne. W związku z tym istnieje jednokładność, która przekształca trójkąt $H_AH_BH_C$ wraz z opisanym na nim okręgiem na trójkąt PRS wraz z opisanym na nim okręgiem, a środek tej jednokładności jest środkiem perspektywy tych trójkątów. Ponieważ środki okręgów opisanych na każdym z tych trójkątów leżą na prostej Eulera trójkąta ABC (dlaczego?), środek jednokładności również leży na tej prostej, co kończy dowód. □

Twierdzenie 4. *Dany jest środek ciężkości G oraz wierzchołek A trójkąta ABC. Wybrano punkt F należący do odcinka AG. Wartość wyrażenia*

$$FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2$$

jest stała, to znaczy nie zależy od położenia punktów B i C, a jedynie od wyboru punktu F.

Dowód. Prawdziwe są następujące równości: $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$. Czyli

$$FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2 = FG^2 + 2\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GB} + GB^2 + FG^2 +$$
$$+ 2\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GC} + GC^2 - GB^2 - GC^2 =$$
$$= 2(FG^2 + \overrightarrow{FG}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})) = 2(FG^2 + \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AG}) =$$
$$= 2FG(FG + AG) = \text{const.}\ \square$$

Twierdzenie 5. *Przez H, G i O oznaczmy ortocentrum, środek ciężkości i środek okręgu opisanego pewnego trójkąta. Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, dla których te punkty są odpowiednio ortocentrum, środkiem ciężkości i środkiem okręgu opisanego. Jeśli wybierzemy punkt A i dodamy warunek, że ma on być wierzchołkiem trójkąta, to otrzymamy co najwyżej jeden taki trójkąt.*

Kiedy taki trójkąt istnieje?

Jeśli taki trójkąt istnieje, to można podać jego jednoznaczną konstrukcję.

Konstruujemy:	Otrzymujemy:
1. Półprostą AG, a na niej punkt leżący w odległości $AG/2$ od punktu G po przeciwnej stronie punktu G niż punkt A.	1. Punkt M, będący środkiem boku BC trójkąta ABC.
2. Półprostą AH. 3. Prostą prostopadłą do półprostej AH, przechodzącą przez punkt M.	2–3. Prostą BC zawierającą bok BC trójkąta ABC.
4. Okrąg o środku w punkcie O i promieniu OA.	4. Punkty przecięć okręgu z prostą BC, to jest wierzchołki B i C trójkąta ABC.

Twierdzenie 6. *Dany jest trójkąt nierównoboczny ABC. Nie istnieje trójkąt wpisany w trójkąt ABC, którego ortocentrum, środek ciężkości oraz środek okręgu na nim opisanego pokrywają się odpowiednio z tymi punktami charakterystycznymi trójkąta ABC.*

Twierdzenie 7. *Niech Y_1, Y_2 i Y_3 będą środkami odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w wierzchołkach trójkąta ABC. Zachodzi równość*

$$\frac{AY_1}{Y_1B}\cdot\frac{BY_2}{Y_2C}\cdot\frac{CY_3}{Y_3A} = 1.$$

Prosta Eulera jest naprawdę ciekawym obiektem geometrycznym i warto się nią zainteresować!