mała delta

Okna gotyckie – ciąg dalszy

Do dokończenia rysunku okna gotyckiego brakowało tylko wypełnienia najmniejszych ostrołuków łukami takimi jak na rysunku 1. Okazuje się, że jest to bardzo łatwe.

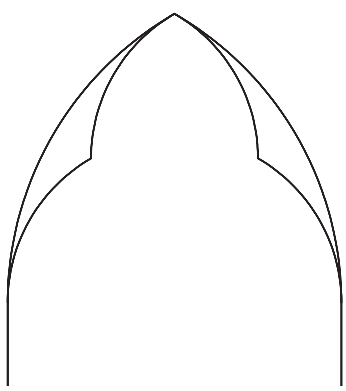
Przypomnijmy, że ostrołuk powstawał z dwóch łuków AC i BC dorysowanych do trójkąta równobocznego ABC, takiego jak na rysunku 2. Niech teraz D, E i F będą środkami boków trójkąta ABC. Narysujmy trzy półokręgi o środkach w punktach D, E i F. Brakującymi łukami są: łuki AE i BD półokręgu o środku F, łuk EC półokręgu o środku D i łuk CD półokręgu o środku E. Nieco inne wykończenie okna można było uzyskać wykorzystując w tym celu fragment trójliścia. Na rysunku 3 widzimy takie wykończenie okna. Jak je rysujemy?

Na początku dorysowujemy do trójkąta ABC trzeci łuk: AB. Otrzymujemy „trójkąt krzywoliniowy” ABC (tzw. trójkąt Reuleaux), w który wpisujemy trzy okręgi parami styczne zewnętrznie, takie same jak przy tworzeniu trójliści (zob. rysunek 4). Musimy tylko wiedzieć, jakie są promienie tych okręgów i gdzie leżą ich środki. Zauważmy najpierw, że środki P, Q i R tych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Trójkąty ABC i PQR mają wspólny środek O, ponadto punkt P leży na odcinku OA, punkt Q leży na odcinku OB i punkt R leży na odcinku OC. Dla określenia położenia tych środków wystarczy więc obliczyć długość odcinka OP.

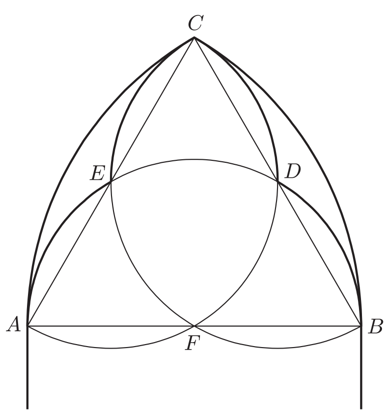
Obliczmy zatem długość promienia tych okręgów i długość odcinka OP. Przyjmijmy $AB = a$. Niech punkt S będzie punktem styczności okręgu o środku R i łuku BC. Wtedy, oczywiście, punkty A, R i S są współliniowe. Niech następnie punkt T będzie punktem styczności okręgów o środkach Q i R (zob. rysunek 5). Oznaczmy literą r promień okręgów wpisanych. Ponieważ trójkąt ATR jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AT^2 + TR^2 = AR^2. \qquad (*)$$

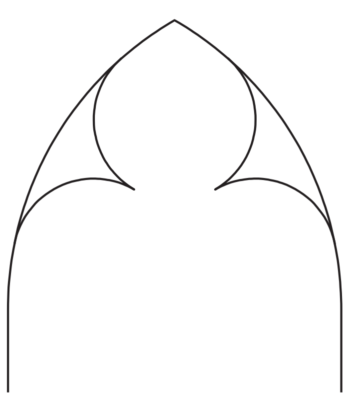
Oczywiście, $TR = r$ oraz $AR = a - r$. Zauważmy następnie, że $AT = AO + OT$. Odcinek AO jest równy promieniowi okręgu opisanego na



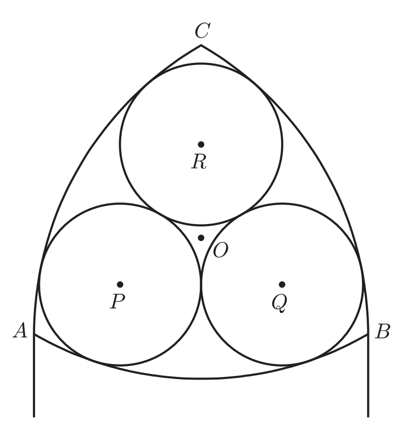
Rys. 1



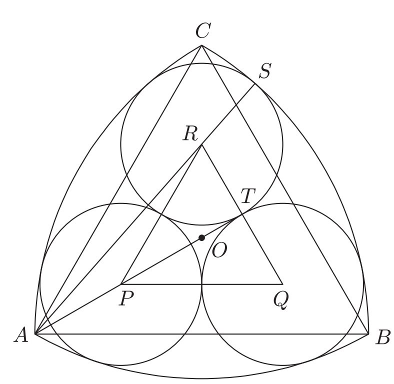
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

trójkącie ABC, a odcinek OT jest równy promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt PQR. Zatem

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{oraz} \quad OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Podstawiając obliczone długości odcinków do równości $(*)$, otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{(a+r)\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2 = (a-r)^2$$

z niewiadomą r. Przekształcając to równanie, otrzymujemy

$$\frac{(a+r)^2}{3} + r^2 = a^2 - 2ar + r^2, \qquad \frac{a^2 + 2ar + r^2}{3} = a^2 - 2ar,$$
$$a^2 + 2ar + r^2 = 3a^2 - 6ar, \qquad r^2 + 8ar - 2a^2 = 0.$$

Jedynym pierwiastkiem dodatnim tego równania jest

$$r = (3\sqrt{2} - 4) \cdot a.$$

Następnie zauważamy, że

$$OP = \frac{2}{3} \cdot PT = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot r = \frac{2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} - 4)}{3} \cdot a.$$

Oczywiście, odcinki długości $(3\sqrt{2} - 4) \cdot a$ oraz $\frac{2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2}-4)}{3} \cdot a$ można w nietrudny sposób skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

Nieco inny wariant tego ostatniego wykończenia okna uzyskamy, wpisując trzy okręgi w oryginalny ostrołuk, tak jak na rysunku 6. Zauważmy, że okręgi o środkach P i Q mają jednakowe promienie, a okrąg o środku R jest od nich nieco mniejszy. Promień r okręgów o środkach P i Q można łatwo obliczyć z twierdzenia Pitagorasa. Tak jak poprzednio przyjmijmy $AB = a$. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku Q i łuku BC. Niech następnie punkt T będzie rzutem punktu Q na odcinek AB (zob. rysunek 7). Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ATQ wynika, że $AT^2 + TQ^2 = AQ^2$, czyli

$$\left(\frac{a}{2} + r\right)^2 + r^2 = (a-r)^2.$$

To równanie ma jeden pierwiastek dodatni: $r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \cdot a$. Nietrudno też podać położenie punktu Q; znamy bowiem długości odcinków

$$AT = \frac{a}{2} + r = (\sqrt{3} - 1) \cdot a$$

oraz

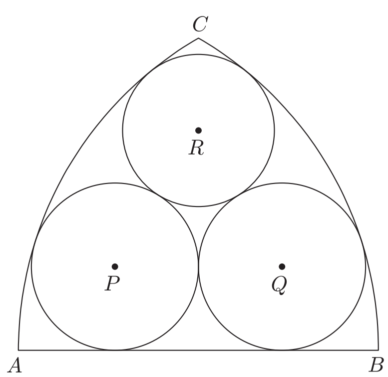
$$TQ = r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \cdot a.$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób można obliczyć promień mniejszego okręgu i jak można wyznaczyć położenie środka tego okręgu. Niech U będzie punktem styczności tego okręgu z łukiem BC, niech V będzie punktem styczności dwóch dolnych okręgów i wreszcie niech W będzie rzutem punktu R na odcinek AB (zob. rysunek 8). Wtedy, oczywiście, punkty R, V i W są współliniowe i punkt W jest środkiem odcinka AB. Oznaczmy promień górnego okręgu literą x i niech $RV = h$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AWR i PVR otrzymujemy układ równań:

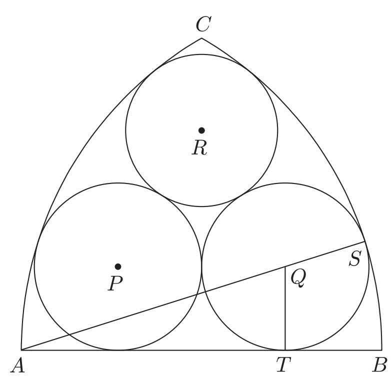
$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r+h)^2 = (a-x)^2, \\ r^2 + h^2 = (r+x)^2. \end{cases}$$

Żmudne rozwiązanie tego układu równań pozostawimy Czytelnikowi; podamy tu jedynie przybliżone wartości niewiadomych: $x \approx 0{,}211a$, $h \approx 0{,}378a$ oraz $r \approx 0{,}232a$.

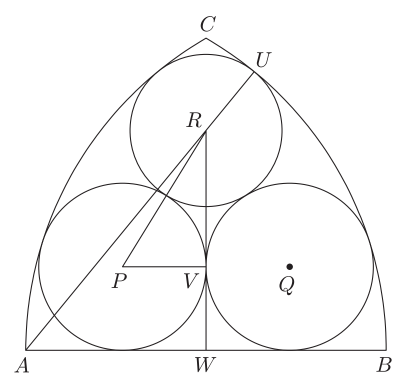
Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8