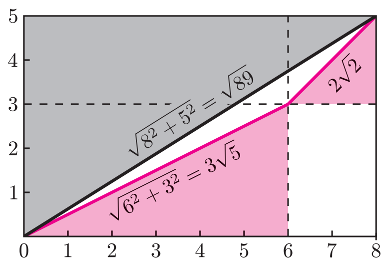
Mała rzecz, a cieszy

Joanna JASZUŃSKA[*]

Niektóre twierdzenia wydają się czasem tak proste i intuicyjnie oczywiste, że aż można wątpić w ich przydatność. Taka choćby *nierówność trójkąta* (NT): *suma długości dwóch boków trójkąta zawsze jest większa od długości trzeciego boku.* Wszak każdy wie, że zamiast iść wzdłuż dwóch krawędzi trawnika, szybciej jest przejść na ukos. Oto kilka przykładów, że nierówność trójkąta jednak bywa przydatna, i to nie tylko w zadaniach geometrycznych.

1. Która z liczb jest większa: $2\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ czy $\sqrt{89}$?

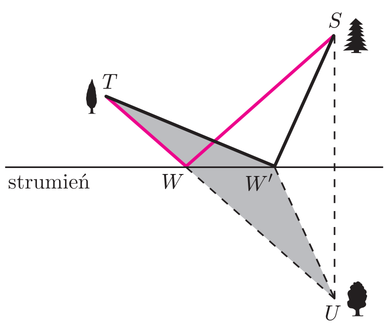
R. Można, oczywiście, rozwiązać to zadanie obliczeniowo – podnosząc do kwadratu, upraszczając... Ale można też spojrzeć na rysunek 1 i wtedy, z NT oraz twierdzenia Pitagorasa, wszystko staje się jasne. □



Rys. 1

2. Sarna chce iść najkrótszą drogą od ulubionej topoli do ulubionego świerka, a po drodze napić się wody ze strumienia. Topola i świerk są po tej samej stronie strumienia. Jaką drogą powinna iść sarna?

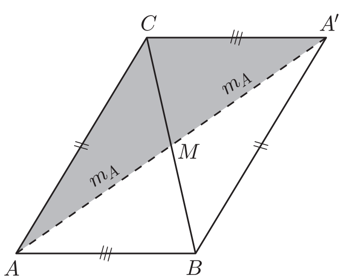
R. Oczywiście, sarna powinna iść od topoli T prosto do miejsca wodopoju W, a następnie prosto od W do świerka S. Aby wybrać optymalne W, sarna, stojąc w T, powinna upatrzeć sobie drzewo U dokładnie po przeciwnej stronie strumienia, niż jest S, i skierować się wprost na nie (rys. 2). Wtedy punkty T, W, U są współliniowe. Dla dowolnego innego W', z symetrii względem strumienia oraz z NT dla $\triangle TUW'$, zachodzi $TW'+W'S=TW'+W'U>TU=TW+WU=TW+WS$, czyli droga przez tak wybrane W jest najkrótsza możliwa. □



Rys. 2

3. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie suma długości środkowych jest mniejsza niż obwód.

R. Oznaczmy przez m_A, m_B, m_C środkowe trójkąta ABC poprowadzone z odpowiednich wierzchołków. Niech trójkąt $A'CB$ będzie obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem środka M boku BC (rys. 3). Wtedy punkty A, M, A' są współliniowe i $AA'=2m_A$. Na mocy NT dla $\triangle AA'C$ uzyskujemy $2m_A<AC+A'C=AC+AB$. Analogicznie $2m_B<AB+BC$ oraz $2m_C<AC+BC$. Dodając stronami i dzieląc przez 2, otrzymujemy tezę. □



Rys. 3

4. Na płaszczyźnie danych jest 100 punktów $A_1,\ldots,A_{100}$ oraz okrąg o promieniu 1. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt B, że $\sum_{i=1}^{100} BA_i \geqslant 100$.

R. Niech B_1B_2 będzie pewną średnicą danego okręgu. Wówczas z NT dla dowolnego i zachodzi $B_1A_i+B_2A_i\geqslant B_1B_2=2$. Dodając stronami takie NT dla wszystkich i, otrzymujemy
$$\sum_{i=1}^{100}(B_1A_i+B_2A_i)=\sum_{i=1}^{100}B_1A_i+\sum_{i=1}^{100}B_2A_i\geqslant 200.$$
Stąd któraś z dwóch liczb $\sum_{i=1}^{100}B_1A_i$, $\sum_{i=1}^{100}B_2A_i$ musi być równa co najmniej 100. Przyjmujemy wtedy jako B odpowiedni z punktów B_1, B_2. □

5. Udowodnij nierówność $a^3+b^3+c^3<(a+b+c)(ab+bc+ca)$, gdzie a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta.

R. Nierówność nietrudno przekształcić do postaci
$$a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)-3abc<0.$$
Z NT wszystkie wyrażenia w nawiasach są ujemne. Kwadraty długości boków oraz abc są dodatnie, zatem całe wyrażenie po lewej stronie jest mniejsze od zera, co kończy dowód. □

[*]Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Na koniec proponuję kilka zadań „domowych".

6. W trapezie $ABCD$ punkt M jest środkiem ramienia BC. Wykaż, że wówczas $AM+MD>AB+CD$.

7. Wewnątrz trójkąta ABC o obwodzie $2p$ dany jest punkt X. Wykaż, że wówczas $p<AX+BX+CX<2p$.

8. Udowodnij uogólnienie NT: dowolna łamana o końcach A i B jest dłuższa od odcinka AB.

9. W czworokącie $ABCD$ kąt BAD jest prosty i $AB=AD$. Udowodnij, że $BC+CD+DB\geqslant 2AC$.

10. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}$$
dla $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$, takich że $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2$.