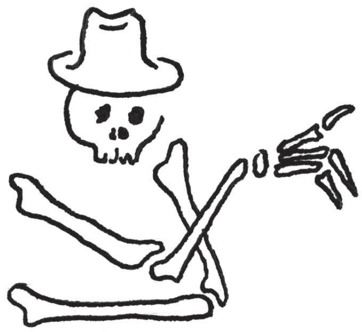


Kości Sichermana

Marcin WOŹNIAK *

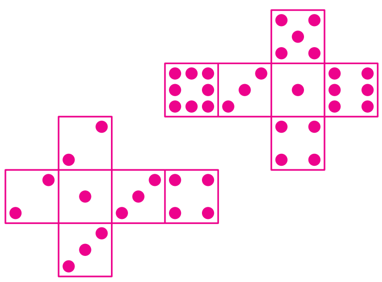
Istnieje wiele gier, w których jako generatora liczb losowych używa się dwóch tradycyjnych kości o liczbach oczek 1, 2, 3, 4, 5 i 6, a za wynik rzutu przyjmuje się sumę liczb oczek uzyskanych na tych kościach. Jak wiadomo, rozkład tej sumy nie jest jednostajny.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Podsumujmy wszystkie możliwe wyniki w tabeli. Widać, że prawdopodobieństwa ich uzyskania nie są równe:

Suma oczek	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prawdopodobieństwo	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Okazuje się, że istnieje jeszcze inna para kości, tym razem różnych, która daje ten sam rozkład wyników. Kości te na cześć odkrywcy nazwane zostały kośćmi Sichermana.



Przez R (jak *row*) oznaczmy kość o liczbach oczek 1, 3, 4, 5, 6 i 8, a przez C (jak *column*) oznaczmy kość o liczbach oczek 1, 2, 2, 3, 3 i 4.

Łączna liczba oczek na ściankach kości R wynosi 27. Można je rozłożyć w taki sposób, aby suma oczek na przeciwległych ściankach wynosiła 9. Na tradycyjnych kościach suma ta wynosi 7, natomiast dla kości C otrzymujemy 5.

Tabela możliwych wyników przy rzucie kośćmi Sichermana wygląda następująco:

C \ R	1	3	4	5	6	8
1	2	4	5	6	7	9
2	3	5	6	7	8	10
2	3	5	6	7	8	10
3	4	6	7	8	9	11
3	4	6	7	8	9	11
4	5	7	8	9	10	12

Zastanó wm y się, jak mogą wyglądać kości Sichermana. Chcielibyśmy odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Jak znaleźć układ oczek na dwóch kościach, tak aby każda suma oczek, od 2 do 12, pojawiała się tak samo często jak na tradycyjnych kościach?
2. Ile jest różnych par kości spełniających ten warunek?
3. Jak rozwiązać pierwszy problem dla większej liczby kości? Dokładniej, jak znaleźć układ $k > 2$ kości, aby rozkład wyników rzutów był taki sam jak dla k kości tradycyjnych?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, należy przyjrzeć się rozkładom sum liczb oczek. Dla każdej z kości konstruujemy wielomianową funkcję tworzącą w ten sposób, że x^d przypiszemy każdej ścianie kostki, która ma d oczek. Kościom tradycyjnym odpowiada funkcja tworząca

$$f(x) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6;$$

dla kości R i C będzie to odpowiednio

$$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^1 \quad \text{i} \quad x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^1.$$

Ta konstrukcja funkcji tworzącej ma sens dla dowolnych kości z nieujemnymi liczbami na ściankach, bez względu na liczbę ścian. Zamiast rzucać dwiema kośćmi o funkcjach tworzących $f(x)$ i $g(x)$, możemy równoważnie rozpatrywać

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

jedną kość o funkcji tworzącej równej $f(x) \cdot g(x)$. Funkcja tworząca dla pary tradycyjnych kości wynosi zatem

$$(x^1 + x^2 + \cdots + x^6)^2 = \\ = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12},$$

gdzie współczynniki wskazują, ile razy pojawia się dany wynik przy rzucie 2 kości. Zauważmy ponadto, że dzięki funkcji tworzącej można łatwo obliczyć, ile jest ścianek na danej kości. Mianowicie, należy wziąć wartość funkcji tworzącej w $x = 1$. W przypadku kości tradycyjnych oczywiście $f(1) = 6$.

Zapiszmy teraz nasze zadanie za pomocą funkcji tworzących.

Niech $W_1(x)$ i $W_2(x)$ będą funkcjami tworzącymi kości Sichermana, które budujemy. Warunek, aby „działały” one jak tradycyjne kości, jest następujący:

(1) $$(x^1 + x^2 + \cdots + x^6)^2 = W_1(x) \cdot W_2(x).$$

Otrzymaliśmy zatem zadanie rozkładu wielomianu na czynniki. Co więcej, wielomiany $W_1(x), W_2(x)$ mają pewne z góry zadane własności:

- $W_1(1) = W_2(1) = 6$, ponieważ chcemy, żeby szukane kości miały po 6 ścianek,
- $W_1(x)$ i $W_2(x)$ nie mają wyrazu wolnego, w przeciwnym bowiem przypadku któraś ze ścianek musiałaby być pusta.

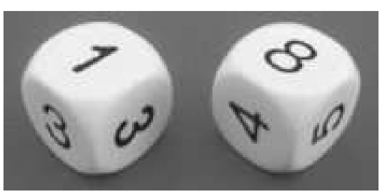
Przyjrzyjmy się rozkładowi wielomianu $x^1 + x^2 + \cdots + x^6$ na czynniki:

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = \\ = x(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = \frac{x(x^6 - 1)}{x - 1} = \frac{x(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x - 1} = \\ = \frac{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x - 1} = x(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Oznaczmy $V_1(x) = x$, $V_2(x) = x + 1$, $V_3(x) = x^2 + x + 1$, $V_4(x) = x^2 - x + 1$. Mamy zatem nowy zapis zadania (1):

(2) $$(V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x))^2 = W_1(x) \cdot W_2(x).$$

Zauważmy, że $V_1(1) = 1$, $V_2(1) = 2$, $V_3(1) = 3$, $V_4(1) = 1$. Obserwacja ta narzuca rozwiązanie zadania (2). Okazuje się, że osiem wielomianów (po dwie kopie $V_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$) należy podzielić na dwie grupy, a w każdej z nich muszą znaleźć się:



- wyrażenie $V_1(x)$, jako jedyne gwarantujące nieobecność wyrazu wolnego,
- wyrażenia $V_2(x)$ i $V_3(x)$, ponieważ zgodnie z regułą liczenia liczby ścianek wielomian $W_j(x)$ w punkcie $x = 1$ powinien dawać wartość 6.

Pozostaje jedynie rozdysponować wielomiany $V_4(x)$. Jeśli uczynimy to sprawiedliwie, włączając po jednym $V_4(x)$ do wielomianów $W_1(x)$ i $W_2(x)$, wtedy otrzymamy kości klasyczne. Jeśli zaś oba $V_4(x)$ „wrzucimy” do jednego z nich, uzyskamy wtedy kości Sichermana.

Kości klasyczne:

$$W_1(x) = W_2(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Kości Sichermana:

(kość C) $$W_1(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$

(kość R) $$W_2(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) = \\ = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

Znamy więc odpowiedź na pytanie 2: istnieje jeden układ kości Sichermana alternatywny do klasycznych kości.

Jeśli chcielibyśmy rozwiązać to zadanie, dopuszczając puste ścianki na kościach, czyli z pominięciem warunku, że każde $W_j(x)$, $j = 1, 2$, musi zawierać wyrażenie $V_1(x)$, otrzymujemy dodatkowe rozwiązania postaci:

a) $$W_1(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5, \\ W_2(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7;$$

Rozwiązanie zadania M 1228.
Niech a oznacza liczbę pól czarnych w ustalonym wierszu lub kolumnie. Wówczas po wykonaniu ruchu liczba pól czarnych w tym wierszu (lub kolumnie) wynosi $8 - a$. Wobec tego po wykonaniu ruchu nie zmienia się parzystość liczby pól czarnych na szachownicy. Na początku pól czarnych było 32, nie jest zatem możliwe doprowadzenie do szachownicy z dokładnie jednym polem czarnym.

b) $W_1(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) =$
$= x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^9,$
$W_2(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3;$

c) $W_1(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$
$W_2(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) =$
$= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7.$

A co dla większej liczby kości?

Szukamy dowolnego układu k kości takich, aby suma wyrzuconych na nich wartości miała taki sam rozkład, jak przy rzucie k kości klasycznych.

Konstruujemy kości Sichermana dla sumy liczby oczek na k kościach ($k > 2$), czyli

$$(x^1 + x^2 + \cdots + x^6)^k = (V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x))^k = \\ = W_1(x) \cdot W_2(x) \cdot \cdots \cdot W_k(x).$$

Tym razem rozdzielamy $4k$ wielomianów $V_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, na k grup tak, żeby

- w każdej było wyrażenie $V_1(x)$,
- w każdej były wyrażenia $V_2(x), V_3(x)$,
- k kopii $V_4(x)$ dzielimy między $W_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Mamy zatem

(3) $$W_j(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4^{r_j}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

gdzie zapis $V_4^{r_j}(x)$ oznacza, że r_j kopii $V_4(x)$ trafia do danego wielomianu $W_j(x)$, przy założeniach: $r_j \leqslant k$ oraz suma użytych potęg $V_4(x)$ w wielomianach $W_j(x)$ wynosi k.

W przypadku, gdy $r_j = 1$, uzyskujemy kostkę klasyczną, natomiast dla $r_j = 0$ i $r_j = 2$ otrzymujemy poznane już kości Sichermana: odpowiednio C i R.

Czy mogą pojawić się inne wartości r_j?

Zastanówmy się, ile ścianek z dwoma oczkami znajduje się na kości scharakteryzowanej przez funkcję tworzącą $W_j(x)$, czyli jaki jest współczynnik przy x^2 w wielomianie $W_j(x)$. Po przemnożeniu występujących w każdej funkcji tworzącej (3) wyrażeń $V_1(x), V_2(x), V_3(x)$ otrzymujemy

(4) $$W_j(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4^{r_j}(x) = \\ = (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(1 - x + x^2)^{r_j}.$$

Zapiszmy $W_j(x)$ inaczej:

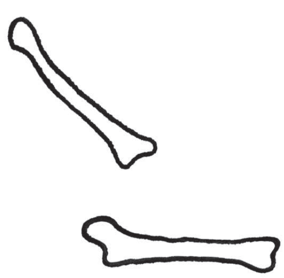
(5) $$W_j(x) = (x + 2x^2 + A)(a_{r_j} + b_{r_j}x + B_{r_j}),$$

gdzie A jest wielomianem stopnia co najmniej 3, a B_{r_j} jest wielomianem stopnia co najmniej 2. Przez prostą indukcję można wykazać, że $a_{r_j} = 1$ oraz $b_{r_j} = -r_j$.

Wobec tego współczynnik przy x^2 w równaniu (5) wynosi $2a_{r_j} + b_{r_j} = 2 - r_j$. A to wyrażenie musi być nieujemne, ponieważ określa liczbę ścianek z dwoma oczkami, więc $r_j \leqslant 2$.

Wnioskujemy zatem, że nie istnieją inne kości spełniające warunki zadania – konkurencję dla kości klasycznych przy rzucaniu k kośćmi może stanowić jedynie „mieszanka” kości klasycznych i kości Sichermana. Warunek poprawności takiego układu jest następujący: sumy na k kościach będą takie same jak na kościach klasycznych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$k = r_1 + \cdots + r_k \quad \text{oraz} \quad r_j \in \{0, 1, 2\}.$$



Przedstawione zadanie konstrukcyjne można rozwijać, rozpatrując kości o różnej liczbie ścianek. W ten sposób otrzymujemy wiele zadań do rozwiązania – niektóre sytuacje dają ciekawe wyniki, a inne nie.

Bibliografia:

1. Odczyt dr. Andrzeja Dąbrowskiego *Kości zostały rzucone*, Wisła, 2.06.2007.
2. Internet:
   http://www.math.ttu.edu/~aledet/stuff/dice.html
   http://plus.maths.org/issue41/features/hobbs/index.html
   http://www.mathnerds.com/mathnerds/best/crazydice/solution.aspx