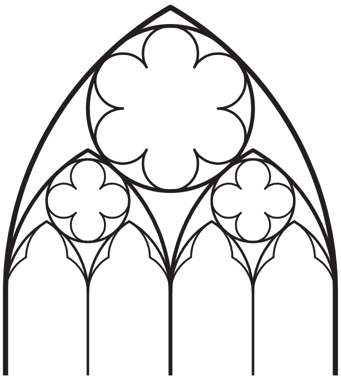
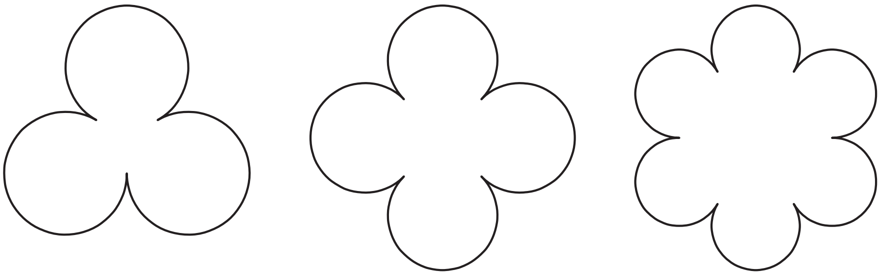
Wieloliście

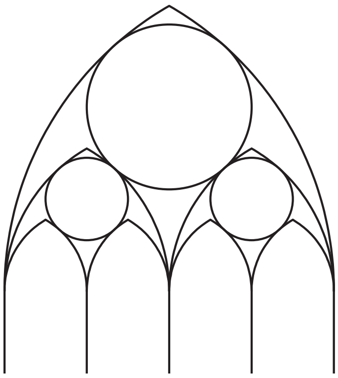
W poprzedniej *Małej Delcie* zajmowaliśmy się jednym z okien paryskiej katedry Notre Dame, które wygląda tak jak na rysunku 1. Przyglądaliśmy się geometrii tego okna i wiemy już, w jaki sposób narysować ostrołuki i wpisać w nie okręgi. Pozostało nam wypełnienie okręgów i najmniejszych ostrołuków (rysunek 2).



Rys. 1

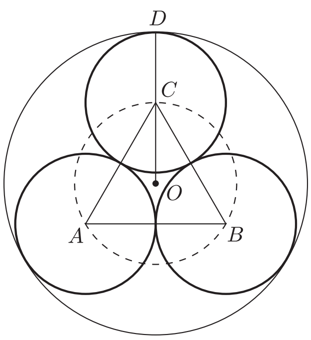
W tym artykule zajmiemy się wypełnieniem okręgów. Figury geometryczne, złożone z kilku łuków, znajdujące się wewnątrz tych okręgów, nazywamy wieloliśćmi. W największym okręgu, na samej górze okna, znajduje się sześcioliść. W dwóch mniejszych okręgach niżej widzimy dwa czteroliście. Innym wieloliściem, często występującym w sztuce gotyckiej, jest trójliść. Na rysunku niżej widzimy te trzy wieloliście: trójliść, czteroliść i sześcioliść.





Rys. 2

Wieloliście tworzymy z łuków okręgów kolejno stycznych zewnętrznie o środkach w wierzchołkach wielokąta foremnego. Chcemy przy tym, by te okręgi były styczne wewnętrznie do okręgu o danym promieniu. Przyjmijmy, że promień tego dużego okręgu wynosi 1. Chcemy obliczyć promienie okręgów wewnętrznych oraz odległości środków tych okręgów od środka dużego okręgu.



Rys. 3

Zróbmy to najpierw dla trójliścia. Niech A, B i C będą środkami małych okręgów (rys. 3). Niech r będzie długością promieni tych małych okręgów. Niech O będzie środkiem dużego okręgu i niech D będzie punktem styczności dużego okręgu z małym okręgiem o środku w punkcie C. Zauważmy, że punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku równym $2r$. Odcinek OC jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wiadomo, że promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy $\frac{2}{3}$ wysokości h tego trójkąta. Mamy zatem:

$$h = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3},$$

$$OC = \frac{2h}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Ponieważ

$$OC + CD = OD = 1,$$

więc otrzymujemy równanie z niewiadomą r:

$$\frac{2r\sqrt{3}}{3} + r = 1.$$

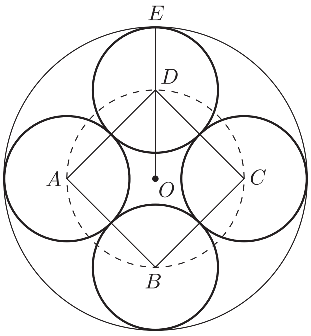
Nietrudno rozwiązać to równanie:

$$r = \frac{3}{2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Stąd dostajemy

$$OC = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Wiemy już, gdzie leżą środki małych okręgów i jakie są promienie tych okręgów. Można też zauważyć, że odcinki o długościach $2\sqrt{3}-3$ i $4-2\sqrt{3}$ można łatwo skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.



Rys. 4

Zajmijmy się teraz czterolistami. Środki A, B, C i D małych okręgów o promieniu r są teraz wierzchołkami kwadratu o boku $2r$ (rys. 4). Punkt E jest punktem styczności dużego okręgu (nadal o promieniu 1) z małym okręgiem o środku w punkcie D. Zauważmy, że odcinek OD, będący promieniem okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$, jest połową przekątnej tego kwadratu. Zatem

$$OD = \frac{2r\cdot\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

Następnie

$$OD + DE = OE = 1,$$

skąd otrzymujemy równanie z niewiadomą r:

$$r\sqrt{2} + r = 1.$$

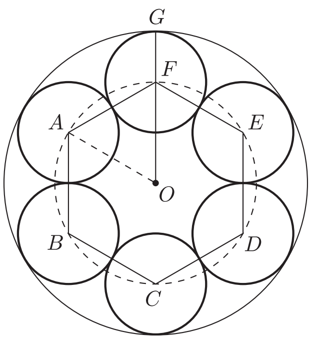
Rozwiązaniem tego równania jest

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

Wreszcie

$$OD = 2 - \sqrt{2}.$$

Znów nietrudno skonstruować za pomocą cyrkla i linijki odcinki o długościach $\sqrt{2}-1$ i $2-\sqrt{2}$.



Rys. 5

Wiemy już, gdzie leżą środki małych okręgów i umiemy te okręgi skonstruować. Dwa okręgi naszego okna możemy więc już wypełnić.

Zajmijmy się teraz sześciolistami. Środki A, B, C, D, E i F małych okręgów są teraz wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku $2r$ (rys. 5). Stąd wynika, że trójkąt AOF jest równoboczny, czyli

$$OF = 2r.$$

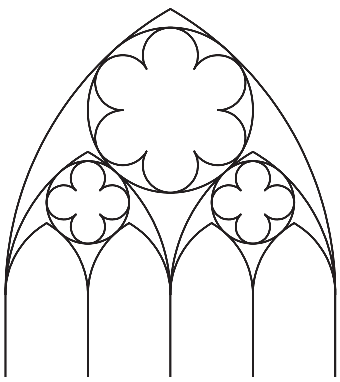
Zatem

$$1 = OG = OF + FG = 2r + r = 3r,$$

skąd otrzymujemy

$$r = \frac{1}{3}, \qquad OF = \frac{2}{3}.$$

To pozwala nam wrysować teraz wielolistcie w puste okręgi z rysunku 2. Pozostają do narysowania małe łuczki w najniższych ostrołukach. Zajmiemy się tym w następnym numerze.


Rys. 6

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI