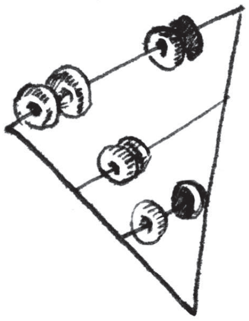


Trójkątne liczydło Pascala

Kamil WOŹNICA[*]

Współczynniki dwumianowe zapisane rzędami dla kolejnych wartości n tworzą interesującą strukturę zwaną *trójkątem Pascala*. Trójkąt ten ma bardzo dużo ciekawych własności; my posłużymy się nim jako liczydłem, za pomocą którego udowodnimy kilka tożsamości kombinatorycznych. Dowody te są niezwykle proste i bardzo sugestywne, dlatego mogą mieć zastosowanie w dydaktyce matematyki.

Opis liczydła

	-1	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2		1	2	1		
3		1	3	3	1	
4		1	4	6	4	1

Rys. 1

a	b
	c

Rys. 2

Zacznijmy najpierw od opisu samego liczydła. Jest to ograniczona od góry nieskończona szachownica, której wiersze ponumerowane są liczbami $0, 1, 2, \ldots$, a kolumny od lewej do prawej liczbami $\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Rozmieszczone są na niej liczby trójkąta Pascala w ten sposób, żeby liczba $\binom{n}{k}$ znalazła się w n-tym wierszu i k-tej kolumnie (rys. 1). Liczby te nazwiemy wartościami odpowiednich pól. Zakreskowane pola na rysunku mają wartość 0.

Sposób przyporządkowania polom ich wartości określa reguła rekurencyjna:

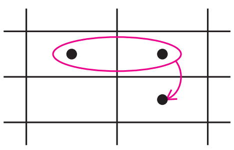
1. jedno wyróżnione pole P_0 najwyższego rzędu szachownicy ma wartość 1. Pozostałe pola tego wiersza mają wartość 0;
2. wartości a, b, c trzech dowolnych pól, położonych tak jak na rys. 2, wiąże zależność: $c = a + b$.

Stawiając pionki na planszy z rysunku 1 przekształcimy ją w liczydło kombinatoryczne. Pionki będą dwóch rodzajów: białe i czarne. Każdy pionek czarny na polu o wartości s ma wartość s, a biały na tym samym polu ma wartość $-s$. Układ większej liczby pionków przedstawia sumę wartości wszystkich pionków.

Niech $P(k, n)$ będzie polem leżącym na przecięciu k-tej kolumny i n-tego wiersza ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$). Jego wartością jest liczba $\binom{n}{k}$. Układ złożony z p pionków czarnych stojących na polach $P(k_1, n_1), \ldots, P(k_p, n_p)$ oraz q pionków białych stojących na polach $P(k_{p+1}, n_{p+1}), \ldots, P(k_{p+q}, n_{p+q})$ oznaczać będziemy za pomocą formalnej sumy

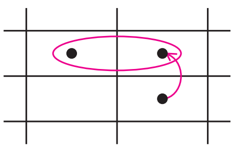
$$S = \sum_{i=1}^{p} \binom{n_i}{k_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \binom{n_j}{k_j}.$$

Pola $P(k_i, n_i)$ nie muszą być różne, mogą być to również pola o wartości 0.



Rys. 3

Wyrażenie S można interpretować na dwa sposoby: albo jako układ pionków, albo jako wartość liczbową tego układu. Przed symbolami $\binom{n_i}{k_i}$ można dopisać współczynniki $a_i \in \mathbb{Z}$, przyjmując, że jeśli a_i jest dodatnie, to $a_i\binom{n_i}{k_i}$ oznacza układ a_i czarnych pionków na polu $P(k_i, n_i)$, natomiast jeśli a_i jest ujemne, to chodzi o $|a_i|$ pionków białych na tym samym polu.



Rys. 4

Niech będzie dany układ U pionków. Można oczywiście na wiele sposobów zmienić ten układ tak, by otrzymać układ V o tej samej wartości co U. Wśród wszystkich operacji $U \to V$ o powyższej własności wyróżnia się bardzo proste manipulacje pionkami, które będziemy nazywać *operacjami elementarnymi*:

1. zastąpienie pary pionków czarnych, z których jeden stoi na polu $P(k, n)$, a drugi na polu $P(k+1, n)$ jednym pionkiem czarnym stojącym na polu $P(k+1, n+1)$, co ukazane jest na rys. 3; oznaczmy tę operację przez f_A, gdzie $A = P(k+1, n+1)$;
2. manipulacja f_A^{-1} odwrotna do f_A (rys. 4);
3. postawienie na dowolnym polu A pary przeciwnej: jednego pionka białego i jednego pionka czarnego lub zdjęcie z dowolnego pola takiej pary pionków.

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

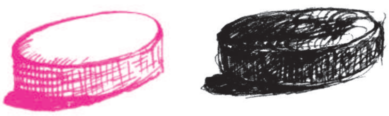
4. postawienie pionka na dowolnym polu o wartości 0 lub zdjęcie pionka z takiego pola.

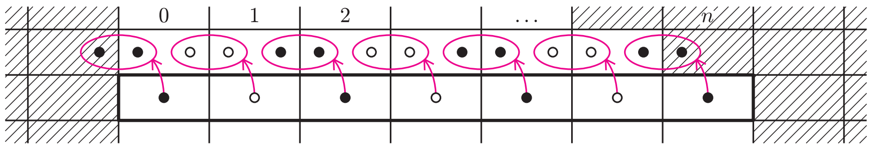
Analogiczne operacje definiujemy także dla pionków białych.

Czynnościowe dowody tożsamości kombinatorycznych

Dowody te będą polegały na przekształcaniu za pomocą operacji elementarnych odpowiednich układów pionków (lewa strona tożsamości) do innych układów (prawa strona tożsamości). Bardzo ważną sprawą w zrozumieniu tych dowodów są ich graficzne ilustracje. Po ich przeanalizowaniu każdy bez większego problemu opisze kroki jakie należy wykonać. Na ilustracjach obowiązuje zasada: układ pionków otoczonych pogrubioną ramką (jeśli na rysunku jest taka ramka) ma tę samą wartość, co układ pionków poza ramką. Jeśli na rysunku jest kilka ramek, a więc i kilka układów, to wszystkie one mają tę samą wartość.

Przejdźmy więc do przykładów.

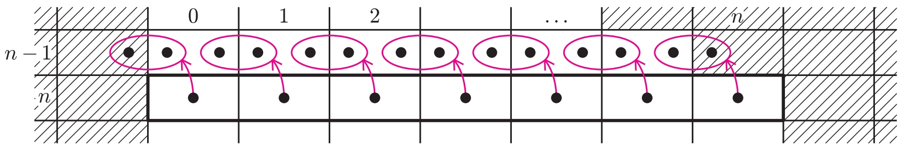




Rys. 5

Przykład 1. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ (rys. 5).

Dowód. Za pomocą operacji typu f_A^{-1} zamieńmy każdy z pionków układu, który odpowiada lewej stronie tożsamości, na dwa pionki w wierszu $n-1$, a następnie zdejmijmy z planszy wszystkie pary przeciwne (jest ich n) oraz oba pionki stojące na polach zerowych $P(-1, n-1)$ i $P(n, n-1)$. Otrzymamy układ pusty, którego wartość jest równa 0. □



Rys. 6

Przykład 2. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ (rys. 6).

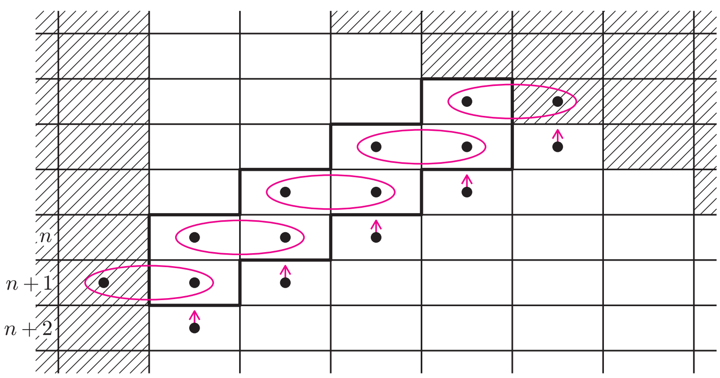
Dowód. Układ pionków reprezentujących lewą stronę równania oznaczmy przez U_n, a jego wartość symbolem u_n. Za pomocą operacji f_A^{-1} przesuńmy układ U_n do wiersza $n-1$ i zdejmijmy z planszy oba pionki z pól zerowych. Otrzymamy w ten sposób układ $2U_{n-1}$. Stąd mamy związek $u_n = 2u_{n-1}$. Wiemy, że $u_0 = 1$. A więc mamy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie równym 2. Stąd $u_n = 2^n$. □

Przykład 3. *Niech n będzie dowolną liczbą naturalną, a k_n cześcią całkowitą $\frac{1}{2}n$. Wówczas ciąg (w_n), którego n-ty wyraz wynosi*

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k_n}{k_n},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots,$ *jest ciągiem Fibonacciego.*

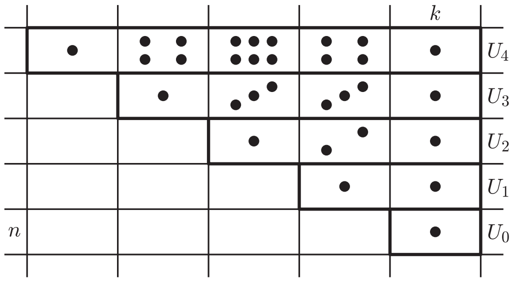
Dowód. Ustawmy $k_{n+2}+1$ czarnych pionków na liczydle w układ W_{n+2} (rys. 7). Każdy pionek z tego układu przekształcamy za pomocą operacji f_A^{-1}. Po zdjęciu pionków z pól o wartości zero otrzymujemy dwa układy W_n i W_{n+1}. Mamy więc tożsamość $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$, ponadto $w_0 = 1$ oraz $w_1 = 1$. A więc ciąg $w_0, w_1, w_2, \ldots$ jest ciągiem Fibonacciego. □



Rys. 7

Przykład 4. $\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j}\binom{n-i}{k-j}$, *gdzie* $0 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód. Niech U_0 będzie układem złożonym z jednego pionka na polu
$$A = P(k, n).$$
Wykonujemy operację f_A^{-1} i oznaczamy symbolem U_1 otrzymany układ dwóch pionków w wierszu $n-1$. Następnie każdy z pionków układu U_1 za pomocą tego samego przekształcenia zamieniamy na równoważną mu parę pionków w wierszu $n-2$; otrzymamy w ten sposób układ U_2. Wyżej wymienione operacje powtarzamy aż do otrzymania układu U_n. Rysunek 8 pokazuje kilka początkowych układów $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$.



Rys. 8

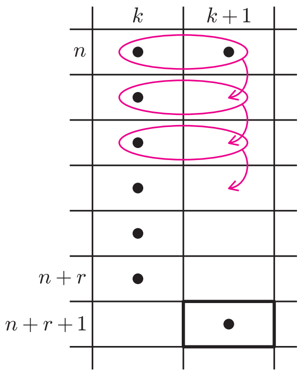
Współczynniki $a_{i,j}$, oznaczające liczbę pionków w j-tym polu układu U_i, można łatwo wyznaczyć zauważając zależność:
$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1},$$
a zatem liczby pionków na polach układów U_i tworzą odwrócony trójkąt Pascala; to oznacza, że
$$a_{i,j} = \binom{i}{j}.$$
Stąd mamy szukaną tożsamość:
$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j}\binom{n-i}{k-j}, \qquad \text{gdzie } 0 \leqslant i \leqslant n.$$
Niektóre składniki tej sumy mogą być równe 0. □

Po tak dokładnie opisanych przykładach nie powinno być już żadnego problemu z dowodami tożsamości (1) i (2):

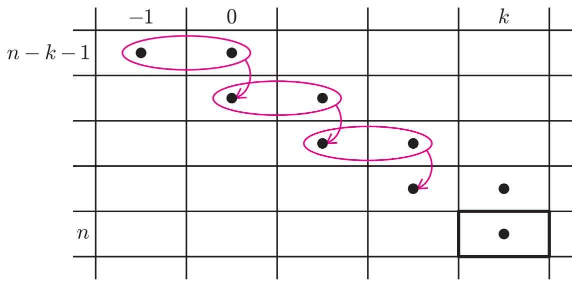
(1) $$\binom{n}{k+1} + \sum_{j=0}^{r} \binom{n+j}{k} = \binom{n+r+1}{k+1} \qquad \text{dla } r = 0, 1, 2, \ldots,$$

(2) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \ldots + \binom{n-k-1}{0},$$
$$\text{gdzie } n > k \geqslant 0.$$

Ilustracją do nich są odpowiednio rysunki 9 i 10.



Rys. 9



Rys. 10

Polecam też zajrzenie do artykułu Przemysława Nowickiego *Trójkątne liczydło Pascala*, Wiadomości Matematyczne XXV (1983).